

Resumos Expandidos

Por que a intuição engana? O acaso explicado pela Matemática

Why does intuition deceive? Chance explained by mathematics

Marcelo Renan Augusto Ferreira¹, Jéssica Buzatto Prudencio², Vanessa Cristina Rhea³, Welinton Anderson Rocha⁴

¹ Professor da Universidade Estadual de Maringá – Campus Maringá. Doutor em Matemática Aplicada

² Professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranavaí. Doutora em Matemática Pura

³ Professor(a) adjunto(a) da Universidade Estadual do Paraná – Campus Campo Mourão. Doutor(a) em Ensino de Ciências e Educação Matemática

⁴ Professor da Universidade Estadual do Paraná - Campus Campo Mourão - e da Universidade Estadual de Maringá - Campus Maringá. Mestre em Matemática

✉ marceloraferreira@gmail.com, jessica.prudencio@unespar.edu.br, vanessarhea@hotmail.com; welintonrocha1998@gmail.com

Palavras-chave:

Probabilidade Condicional;
Teorema de Bayes;
Acaso.

Keywords:

Conditional Probability;
Bayes' Theorem;
Chance.

Resumo

O acaso é um elemento central na tomada de decisões em contextos de incerteza. Este trabalho discute a importância da aleatoriedade na construção do raciocínio probabilístico, explorando como a intuição humana frequentemente falha ao lidar com situações aparentemente simples, mas condicionadas por informações ocultas ou parciais. A partir de três problemas — o Problema de Monty Hall, um caso médico de testes diagnósticos e um caso de scanner de aeroporto — abordamos conceitos fundamentais como probabilidade condicional e o Teorema de Bayes. Por meio de simulações e formalizações matemáticas, mostra-se como a atualização correta de probabilidades diante de novas evidências pode impactar decisões em áreas como medicina, estatística e até mesmo jogos. O trabalho também ressalta o papel pedagógico desses problemas para o ensino de matemática e pensamento crítico.

Abstract

Chance is a central element in decision-making under uncertainty. This paper discusses the importance of randomness in developing probabilistic reasoning, exploring how human intuition often fails when dealing with seemingly simple situations influenced by hidden or partial information. Using three problems—the Monty Hall Problem, a medical case involving diagnostic tests, and an airport scanner case—we address fundamental concepts such as conditional probability and Bayes' Theorem. Through simulations and mathematical formalizations, we demonstrate how correctly updating probabilities in light of new evidence can impact decisions in areas like medicine, statistics, and even games. The paper also highlights the pedagogical role of these problems in mathematics education and critical thinking development.

1 INTRODUÇÃO

O acaso - fenômeno que descreve eventos imprevisíveis ou não determinísticos - influencia decisões do cotidiano, diagnósticos médicos (como a imprevisibilidade de sintomas atípicos ou resultados de exames falsos positivos/negativos), estratégias econômicas e até o funcionamento de algoritmos de inteligência artificial. No entanto, nossa interpretação desses eventos muitas vezes desconsidera a lógica da probabilidade. Um erro comum é a dificuldade de ajustar nossas convicções iniciais (crenças prévias) quando recebemos novas evidências — processo no qual a probabilidade condicional e o Teorema de Bayes se destacam como ferramentas para uma análise racional.

Neste trabalho, analisamos como eventos aleatórios e decisões condicionais se entrelaçam em situações reais e paradoxais, por meio de três problemas ilustrativos:

- 1 - O Problema de Monty Hall, um paradoxo clássico que revela armadilhas cognitivas em escolhas simples;
- 2 - Um exemplo médico, que mostra como a baixa prevalência de uma doença pode gerar interpretações equivocadas, mesmo com testes eficazes;
- 3 - A triagem de segurança em aeroportos, onde *scanners* altamente eficientes produzem falsos positivos devido à raridade dos eventos perigosos.

Nosso objetivo vai além da resolução desses problemas: buscamos refletir sobre como tomamos decisões com base em informações parciais ou enviesadas.

Exploramos desde abordagens intuitivas até formalizações matemáticas, demonstrando que compreender o acaso é essencial para uma leitura mais crítica e precisa da realidade.

2 DESENVOLVIMENTO

O acaso, muitas vezes, faz parte de diversas decisões. Apesar de eventos aleatórios fazerem parte do cotidiano, temos dificuldade em compreendê-los corretamente. Como destaca Leonard Mlodinow em *O Andar do Bêbado* (2008), "nossas mentes são programadas para encontrar padrões, mesmo onde não há nenhum". Essa tendência nos leva a erros sistemáticos, especialmente quando novas informações alteram o contexto - cenário típico da probabilidade condicional.

Definição: A probabilidade condicional de um evento A , dado que um evento B ocorreu, é:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) > 0.$$

Teorema de Bayes: Seja $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω , tal que:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ (eventos mutuamente exclusivos);
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ (a união dos eventos cobre todo o espaço).

Para um evento B com $P(B) > 0$, temos:

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)}.$$

Em que:

- $P(A_k | B)$: Probabilidade a posteriori;
- $P(A_k)$: Probabilidade a priori;

- $P(B | A_k)$: Verossimilhança;
- $\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$: Probabilidade total de B .

Vamos entender o funcionamento desses conceitos por meio de três problemas que discutiremos nesta seção.

Problema 1 - Monty Hall

Considere três portas (P_1, P_2, P_3) :

- Uma contém um prêmio (com probabilidade $\frac{1}{3}$);
- As outras duas contêm bodes.

O jogo segue os passos:

1. O jogador escolhe uma porta (ex: P_1);
2. Monty Hall, que sabe onde está o prêmio, abre sempre uma das outras portas com um bode;
3. O jogador pode manter sua escolha ou trocar para a outra porta fechada.

À primeira vista, parece que as chances são de 50% após uma porta ser aberta. No entanto, a análise revela que trocar aumenta as chances de vitória para $\frac{2}{3}$.

Assumindo que o jogador sempre escolhe P_1 , temos:

Prêmio Inicial	Escolha	Monty Abre	Se Trocar
P_1	P_1	P_2 ou P_3	Derrota
P_2	P_1	P_3	Vitória
P_3	P_1	P_2	Vitória

Ou seja, trocar leva à vitória em 2 de 3 casos. Vamos formalizar usando probabilidade condicional.

Considere os eventos:

- T_1 : o prêmio está na porta 1 ;
- T_2 : o prêmio está na porta 2 ;
- T_3 : o prêmio está na porta 3 ;
- A : Monty abrir a porta 3

Suponha que o jogador escolheu P_1 . As probabilidades condicionais são:

- $P(A | T_1) = \frac{1}{2}$ (Monty pode abrir P_2 ou P_3);
- $P(A | T_2) = 1$ (só pode abrir P_3);
- $P(A | T_3) = 0$ (não pode abrir P_3).

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
 P(T_1 | A) &= \frac{P(T_1) \cdot P(A|T_1)}{P(T_1) \cdot P(A | T_1) + P(T_2) \cdot P(A | T_2) + P(T_3) \cdot P(A | T_3)} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0} \\
 &= \frac{1/6}{1/6+1/3} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma $P(\text{trocar}) = \frac{2}{3}$.

Interpretação: Mesmo após Monty revelar uma porta com bode, a chance de o prêmio estar na porta escolhida inicialmente permanece $\frac{1}{3}$. A probabilidade de estar na outra porta passa a $\frac{2}{3}$. Portanto, trocar é a melhor estratégia.

Esse resultado ilustra como uma ação informada (Monty sabe onde está o prêmio) altera as probabilidades de forma significativa. É uma aplicação direta da probabilidade condicional e do Teorema de Bayes. Esse mesmo raciocínio se aplica a contextos reais, como testes médicos: mesmo com alta sensibilidade, a baixa prevalência pode gerar muitos falsos positivos. O exemplo de Monty Hall é, portanto, uma excelente metáfora para o papel da informação e do viés cognitivo em decisões sob incerteza.

Problema 2 - Teste de Mamografia

A interpretação adequada de probabilidades médicas é um desafio bem documentado na literatura, como destacado por (Gigerenzer et al., 2007). Em seu estudo seminal, os autores demonstram como profissionais de saúde e pacientes frequentemente interpretam erroneamente dados estatísticos, especialmente em testes diagnósticos. Para ilustrar essa dificuldade, considere o seguinte cenário adaptado de sua análise:

Considere uma mulher entre 40 e 50 anos, sem sintomas aparentes, que realiza um exame de mamografia. Suponha os seguintes dados:

- Prevalência da doença:

$$P(\text{Câncer}) = 0,01.$$

- Sensibilidade do teste:

$$P(\text{Positivo} \mid \text{Câncer}) = 0,80.$$

- Falso positivo:

$$P(\text{Positivo} \mid \text{Sem Câncer}) = 0,10.$$

Objetivo: Determinar a probabilidade de a mulher realmente ter câncer, dado que o teste foi positivo:

$$P(\text{Câncer} \mid \text{Positivo}) = ?$$

Resolução:

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(\text{Câncer} \mid \text{Positivo}) = \frac{P(\text{Positivo} \mid \text{Câncer}) \cdot P(\text{Câncer})}{P(\text{Positivo})}$$

Calculando $P(\text{Positivo})$:

$$P(\text{Positivo}) = 0,80 \cdot 0,01 + 0,10 \cdot 0,99 = 0,008 + 0,099 = 0,107.$$

Substituindo:

$$P(\text{Câncer} \mid \text{Positivo}) = \frac{0,008}{0,107} \approx 0,0748.$$

Interpretação: Embora o teste tenha boa sensibilidade (80%) e especificidade (90%), a probabilidade de a mulher realmente estar com câncer, dado um resultado positivo, é de apenas 7,48% - um resultado contraintuitivo.

Explicação: A baixa prevalência da doença faz com que a maioria dos resultados positivos sejam falsos positivos, mesmo com um bom teste.

Simulação com 10.000 mulheres:

- 100 têm câncer;

- 80 testam positivo;
- 20 testam negativo.
- 9.900 não têm câncer:
- 990 testam positivo;
- 8.910 testam negativo.

Total de positivos: $80(\text{verdadeiros}) + 990(\text{falsos}) = 1.070$.

$$P(\text{Câncer} \mid \text{Positivo}) = \frac{80}{1070} \approx 0,0748.$$

Conclusão: O exemplo mostra que, ao interpretar testes diagnósticos, é fundamental considerar a prevalência. O Teorema de Bayes pode contribuir para que não haja decisões precipitadas baseadas apenas em resultados positivos, promovendo uma leitura mais precisa e contextualizada.

Problema 3 - Triagem em Aeroportos

Sistemas de segurança operam sob incerteza e baixa prevalência de eventos perigosos. Como destacado por (Woloshin, Schwartz & Welch, 2008), mesmo tecnologias avançadas geram alarmes cuja interpretação requer compreensão de probabilidade condicional - particularmente do Teorema de Bayes. Os autores demonstram que, em contextos de rastreamento com baixa prevalência, falsos positivos tendem a dominar os resultados, levando a interpretações enganosas

Enunciado: Suponha que 1 em cada 10.000 passageiros porta um item perigoso. Um scanner com as seguintes características é utilizado:

- Sensibilidade: $P(\text{Alarme} \mid \text{Ameaça}) = 0,99$;
- Especificidade: $P(\text{Sem Alarme} \mid \text{Sem Ameaça}) = 0,99$;
- Falso positivo: $P(\text{Alarme} \mid \text{Sem Ameaça}) = 0,01$;
- Prevalência: $P(\text{Ameaça}) = 0,0001$.

Objetivo: Qual a probabilidade de que um passageiro represente ameaça, dado que o alarme soou?

$$P(\text{Ameaça} \mid \text{Alarme}) = ?$$

Resolução (Bayes):

$$P(\text{Ameaça} \mid \text{Alarme}) = \frac{P(\text{Alarme} \mid \text{Ameaça}) \cdot P(\text{Ameaça})}{P(\text{Alarme})}.$$

Calculando $P(\text{Alarme})$:

$$P(\text{Alarme}) = 0,99 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,9999 = 0,000099 + 0,009999 = 0,010098$$

Substituindo:

$$P(\text{Ameaça} \mid \text{Alarme}) = \frac{0,000099}{0,010098} \approx 0,0098.$$

Ou seja, mesmo com alarme positivo, a chance real de ameaça é de apenas 0,98%.

Simulação: Em 10.000 passageiros:

- 1 carrega ameaça:
- Verdadeiro positivo: $1 \cdot 0,99 = 0,99$.
- 9.999 não carregam:

- Falsos positivos: $9.999 \cdot 0,01 = 99,99$.

Total de alarmes: $0,99 + 99,99 = 100,98$. Proporção real de ameaça entre os alarmes:

$$P(\text{Ameaça} \mid \text{Alarme}) = \frac{0,99}{100,98} \approx 0,0098.$$

Interpretação: Mesmo com 99% de precisão, a baixa prevalência faz com que os falsos positivos superem amplamente os verdadeiros.

Conclusão: Este exemplo reforça a importância de considerar prevalência e probabilidade condicional em sistemas críticos. Alarmes devem ser interpretados com cautela para evitar reações desproporcionais - uma aplicação direta do Teorema de Bayes à segurança pública.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, buscamos compreender a importância do acaso e da probabilidade condicional na análise de eventos incertos, por meio da formalização matemática e da aplicação do Teorema de Bayes. Observamos que, embora muitos problemas apresentem estruturas simples à primeira vista, a interpretação correta das probabilidades requer uma análise cuidadosa das informações disponíveis e da forma como elas se relacionam entre si.

O problema de Monty Hall revelou como a intuição humana pode ser enganada quando não consideramos que a informação revelada (a ação do apresentador) depende de conhecimento prévio sobre o sistema. Esse exemplo evidenciou a necessidade de revisão das probabilidades a partir de eventos condicionais — algo que o Teorema de Bayes permite fazer com precisão.

Na sequência, os exemplos aplicados da vida real — o teste de mamografia e a triagem de segurança em aeroportos — mostraram que a probabilidade de um resultado positivo estar realmente associado à ocorrência do evento de interesse (doença ou ameaça) depende fortemente da prevalência. Mesmo exames ou sistemas com alta sensibilidade e especificidade podem gerar interpretações erradas se desconsiderarmos a baixa incidência do evento observado. O resultado, muitas vezes, é a predominância de falsos positivos, que podem gerar consequências médicas, econômicas e sociais indesejadas.

Em todos os casos, ficou evidente que a probabilidade condicional e o Teorema de Bayes não são apenas conceitos abstratos, mas instrumentos essenciais para lidar com a complexidade da vida real — seja em decisões médicas, estratégias de segurança ou até mesmo jogos televisivos.

Portanto, mais do que ensinar fórmulas, o ensino de probabilidade precisa enfatizar a compreensão da lógica envolvida no raciocínio sob incerteza. Ao fazer isso, podemos contribuir para formação de cidadãos mais críticos e preparados para interpretar dados e tomar decisões fundamentadas — uma habilidade cada vez mais necessária em tempos de excesso de informação e tomada de decisões rápidas.

REFERÊNCIAS

GIGERENZER, Gerd. **O andar do bêbado:** como o acaso determina nossas vidas. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

MOORE, David S.; MCCABE, George P. **Introdução à prática da estatística.** 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

GIGERENZER, Gerd; GAISSMAIER, Wolfgang; KURZ-MILCKE, Eva; SCHWARTZ, Lisa M.; WOLOSHIN, Steven. Helping doctors and patients make sense of health statistics. **Psychological Science in the Public Interest**, Oxford, v. 8, n. 2, p. 53–96, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1539-6053.2008.00033.x>. Acesso em: 12 jul. 2025.

WOLOSHIN, Steven; SCHWARTZ, Lisa M.; WELCH, H. Gilbert. The risk of death by screening. **BMJ – British Medical Journal, London**, v. 336, n. 7642, p. 1257–1258, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1136/bmj.39581.656253.80>. Acesso em: 12 jul. 2024.