

Definindo e exemplificando os diferentes tipos de conexidade na topologia

Defining and exemplifying the different types of connectedness in topology

João Paulo Chiari de Gasperi¹, Jéssica Buzatto Prudencio²

¹ Acadêmico do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão.

² Docente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranavaí. Doutora em Matemática Pura.

✉ jpgasperi1@gmail.com, jessica.prudencio@unespar.edu.br

Palavras-chave:

Topologia;
Conexidade;
Conexidade por caminhos;
Conexidade Local.

Resumo

Conexidade é um conceito topológico muito importante, estando presente em diversos ramos da matemática. Esse trabalho de cunho qualitativo dedutivo tem o objetivo de definir e relacionar, da forma mais geral possível, três diferentes tipos de conexidade na topologia: conexidade, conexidade por caminhos e conexidade local. Também são apresentadas propriedades de espaços topológicos arbitrários que satisfazem essas definições, além de ser desenvolvida toda a teoria necessária para a compreensão desses conceitos, incluindo as noções de conjuntos abertos, conjuntos fechados, bases, subespaços topológicos, interior, fecho e fronteira de um conjunto. Prova-se que a conexidade é mantida através de funções contínuas o que acarreta em uma forma de verificar se dois conjuntos não são homeomorfos. Também se conclui que a conexidade por caminhos é uma forma mais forte de conexidade, quando é demonstrado que todo conjunto conexo por caminhos é também conexo. Além disso, esse trabalho contribui na compreensão de conceitos topológicos abstratos por fornecer exemplos envolvendo subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Abstract

Keywords:

Topology;
Connectedness;
Path Connectedness;
Local Connectedness.

Connectedness is a highly important topological concept, present in various branches of mathematics. This qualitative and deductive study aims to define and relate, in the most general way possible, three different types of connectedness in topology: connectedness, path connectedness, and local connectedness. It also presents properties of arbitrary topological spaces that satisfy these definitions, as well as the development of all the necessary theory for understanding these concepts, including the notions of open sets, closed sets, bases, topological subspaces, interior, closure, and boundary of a set. It is proven that connectedness is preserved under continuous functions, which provides a way to verify when two sets are not homeomorphic. It is also concluded that path connectedness is a stronger form of connectedness, as it is shown that every path-connected set is also connected. Furthermore, this work contributes to the understanding of abstract topological concepts by providing examples involving subsets of $\mathbb{R}^n$.

1 INTRODUÇÃO

Na topologia, um conceito importante e intuitivo é o da conexidade. Ele consiste em ser possível ou não separar um conjunto em duas partes que, a grosso modo, não se conectam. Um exemplo da importância da formalização desse conceito é a generalização do Teorema do Valor Intermediário, estudado em cursos de cálculo e de análise. Nesse trabalho, serão definidos três diferentes tipos de conexidade, demonstradas as suas principais propriedades e desenvolvidos os conceitos necessários para tal baseando-se nos trabalhos de Lima (2020) e Munkres (2014).

2 DESENVOLVIMENTO

Começamos por apresentar os conceitos básicos da topologia.

Definição 1. Seja X um conjunto qualquer. Uma Topologia sobre X é um conjunto $\tau \subset \mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. Uma união arbitrária de elementos de τ também está em τ ;
3. Uma interseção finita de elementos de τ também está em τ .

Se $U \in \tau$, dizemos que U é aberto em X sob a topologia τ . Chamamos (X, τ) de espaço topológico. Omitiremos a topologia quando estiver claro com qual estamos trabalhando.

Exemplo. Consideremos $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X e $\tau_2 = \{\emptyset, X\}$. (X, τ_1) e (X, τ_2) são espaços topológicos. Com efeito, sejam $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma coleção arbitrária de abertos U_λ em τ_1 e $U = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$. Como cada $U_\lambda \subset X$, então $U \subset X$. Logo, $U \in \mathcal{P}(X) = \tau_1$. O fato de que uma interseção finita de abertos também está em τ_1 é mostrado de forma análoga. Para mostrar que τ_2 é uma topologia, a única união possível é $\emptyset \cup X = X \in \tau_2$ e a única interseção possível é $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_2$. Chamamos τ_1 e τ_2 de topologia discreta e topologia indiscreta, respectivamente.

Definição 2. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia em X se:

1. Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$, onde $x \in B$;
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, então existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Dizemos que τ é topologia gerada por $\mathcal{B}$ quando todo aberto U em τ é tal que se $x \in U$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Mostremos que ao definir τ dessa forma temos, de fato, uma topologia. $\emptyset$ é aberto por vacuidade. X também é aberto pois, pelo item 1 da Definição 2, se $x \in X$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset X$. Seja agora $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de abertos de τ e U sua união. Se $x \in U$, então $x \in U_\lambda$ para algum λ . Como U_λ é aberto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_\lambda \subset U$, ou seja, U é aberto. Seja $U = \bigcap_{i=1}^k U_i$, com U_i aberto de τ . Se $x \in U$, então $x \in U_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Logo, para todo i , existe $B_i \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_i \subset U_i$. Indutivamente, pela segunda propriedade da definição de $\mathcal{B}$, existe um $B \in \mathcal{B}$ onde $x \in B \subset B_1 \cap \dots \cap B_k$. Como $B_i \subset U_i$ então $\bigcap B_i \subset \bigcap U_i = U$. Logo, $x \in B \subset U$.

Existe outra forma de caracterizar a topologia gerada por uma base, que é dada pela seguinte proposição:

Proposição 3. Seja τ topologia gerada por uma base $\mathcal{B}$. Então τ é igual ao conjunto de todas as possíveis uniões dos elementos de $\mathcal{B}$.

Demonstração. Consultar Munkres (2014).

Segue da Proposição 3 que toda topologia tem uma base. Basta considerar $\mathcal{B} = \tau$. Com efeito, se X é aberto de τ , então X é união de elementos de $\mathcal{B}$, pois $X \in \mathcal{B}$ e, se $U = \bigcup U_\lambda$ for uma união de elementos arbitrários de $\mathcal{B}$, como cada U_λ está em X , U também estará.

Exemplo. Considerando o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, definimos uma topologia em $\mathbb{R}$ (que denominamos por topologia canônica) como a topologia que tem como base o conjunto $\mathcal{B}$ de todos os intervalos abertos da reta. Esta topologia é comumente utilizada nos cursos de análise. Sempre que utilizarmos o conjunto $\mathbb{R}$, o mesmo estará munido da topologia canônica, salvo menção contrária.

Proposição 4. Sejam τ e τ' duas topologias sobre um conjunto X , geradas, respectivamente, pelas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, então $\tau \subset \tau'$.

Demonstração. Suponha $A \in \tau$. Pela Proposição 3, $A = \bigcup A_\lambda$, onde $A_\lambda \in \mathcal{B}$. Da hipótese, $A_\lambda \in \mathcal{B}'$, logo $A = \bigcup A_\lambda$, onde $A_\lambda \in \mathcal{B}'$, ou seja $A \in \tau'$.

Definição 5. Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos. Definimos sobre o produto cartesiano $X \times Y$ a topologia produto τ , que tem como base o conjunto $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_1 \text{ e } V \in \mathcal{B}_2\}$, onde $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de τ_1 e τ_2 , respectivamente.

Exemplo. Consideramos a topologia canônica em um espaço $\mathbb{R}^n$ como sendo a topologia produto dos espaços $\mathbb{R}$ munidos também pela topologia canônica. Essa é estudada à fundo em Lima (2020).

Definição 6. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$. Definimos a topologia $\tau' = \{A \subset Y \mid A = U \cap Y, U \in \tau\}$ sobre Y como a topologia do subespaço.

Para verificar que τ' definida dessa forma é, de fato, uma topologia, consulte Munkres (2014). Nessas circunstâncias, quando $U \in \tau'$, dizemos que U é aberto em Y . Ainda, (Y, τ') é dito um subespaço topológico de (X, τ) .

Exemplo. Considere o conjunto $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Temos que $(\frac{1}{2}, 1] = (\frac{1}{2}, 2) \cap X$. Logo, $(\frac{1}{2}, 1]$ é aberto em X , apesar de não ser aberto em $\mathbb{R}$.

Proposição 7. Sejam (X, τ) um espaço topológico e (Y, τ') um subespaço topológico do espaço (X, τ) . O conjunto $\mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de τ' .

Demonstração. U é aberto em Y se, e somente se, $U = V \cap Y$, onde V é aberto em X . $V = \bigcup B_\lambda$, onde os B_λ são elementos de $\mathcal{B}$. Logo, $U = (\bigcup B_\lambda) \cap Y = \bigcup (B_\lambda \cap Y)$, ou seja, U é união dos elementos de $\mathcal{B}'$.

Definição 8. Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $C \subset X$ é dito fechado sob τ se, e somente se, $X - C$ é aberto.

Dessa definição, segue que um conjunto é aberto se, e somente se, seu complemento é fechado.

Teorema 9. Seja X um espaço topológico. Valem as seguintes afirmações:

1. $\emptyset$ e X são fechados;
2. Uma interseção arbitrária de fechados é fechada;
3. Uma união finita de fechados é fechada.

Demonstração.

1. $\emptyset = X - X$ e $X = X - \emptyset$ são abertos.
2. Seja $\{C_\lambda\}$ uma coleção de fechados de X . Então, para cada λ , $C_\lambda = X - U_\lambda$, onde U_λ é aberto em X . Assim, $\cap C_\lambda = \cap (X - U_\lambda) = X - \cup U_\lambda$ é fechado em X .
3. Seja $\{C_i\}$ uma coleção finita de fechados de X . Então, $C_i = X - U_i$ com U_i aberto de X . Dessa forma, $\cup C_i = \cup (X - U_i) = X - \cap U_i$ é fechado em X .

Proposição 10. Seja Y um sub-espço topológico de X . C é fechado em Y se, e somente se, $C = D \cap Y$, com D fechado em X .

Demonstração. Consultar Munkres (2014).

Definição 11. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Definimos:

1. O interior de A , denotado por $\text{int}A$, como a união de todos os abertos de X contidos em A .
2. O fecho de A , denotado por $\bar{A}$, como a interseção de todos os fechados de X que contém A ;
3. A fronteira de A , denotada por ∂A , que é conjunto $\bar{A} - \text{int}A$.

Proposição 12. Dados X um espaço topológico e $A \subset X$, então:

1. $\text{int}A \subset A \subset \bar{A}$;
2. $\text{int}A = A$ se, e somente se A é aberto;
3. $A = \bar{A}$ se, e somente se A é fechado.

Demonstração.

1. Seja $\{U_\lambda\}$ a coleção dos abertos de X contidos em A . Como cada U_λ é subconjunto de A , sua união também o é. De forma análoga, fazendo $\{C_\lambda\}$ a coleção dos fechados contendo A , vale que $A \subset C_\lambda$ para todo λ . Portanto, A é subconjunto da interseção.
2. Seja A aberto e $\{U_\lambda\}$ a coleção dos abertos de X contendo A . Existe um λ_0 , tal que $U_{\lambda_0} = A$. Logo $A \subset \cup U_\lambda = \text{int}A$ e, portanto, $A = \text{int}A$. Reciprocamente, se $A = \text{int}A$, então A é aberto pois $\text{int}A$ é uma união de abertos.
3. Seja A fechado e $\{C_\lambda\}$ a coleção de fechados de X contendo A . Existe um λ_0 tal que $C_{\lambda_0} = A$. Logo $\bar{A} = \cap C_\lambda \subset C_{\lambda_0} = A$ e portanto, $\bar{A} = A$. Reciprocamente, se $\bar{A} = A$, como $\bar{A}$ é interseção de fechados, também será fechado.

Exemplo. Consideremos o conjunto $X = (-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Temos que $\text{int}X = (-1, 1)$ e $\bar{X} = [-1, 1]$ e $\partial X = [-1, 1] - (-1, 1) = \{-1, 1\}$. Note que, X não é nem aberto nem fechado em $\mathbb{R}$.

Proposição 13. Sejam X um espaço topológico, Y subespaço topológico de X e $Z \subset Y$. Temos que $\bar{Z}'$ o fecho de Z em Y é igual a $\bar{Z} \cap Y$, onde $\bar{Z}$ é o fecho de Z em X .

Demonstração. Consultar Munkres (2014).

Diremos que uma vizinhança de um elemento $x \in X$ é um conjunto U aberto e que contém x .

Teorema 14. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Então:

1. $x \in \bar{A}$ se, e somente se, toda vizinhança de x intercepta A . Equivalentemente, existe uma vizinhança de x que não intercepta A se, e somente se, $x \notin \bar{A}$;
2. $x \in \text{int}A$ se, e somente se, existe U_x vizinhança de x , tal que $U_x \subset A$.

Demonstração.

1. Suponhamos que $x \notin \bar{A}$. Da definição de fecho, existe um conjunto fechado $C \supset A$, tal que $x \notin C$. Então $x \in X - C$ e tal conjunto é aberto. Afirmamos que $(X - C) \cap A$ é vazio. Com efeito, $(X -$

$C) \cap A = [(X - C) \cap (X - A)] \cap A = (X - C) \cap (X - A) \cap A = \emptyset$. Reciprocamente, suponhamos que exista uma vizinhança U de x , tal que $U \cap A = \emptyset$. Então $X - U$ é fechado e $x \notin X - U$. Além disso, $X - U$ contém A , pois, $\alpha \in A$ implica que $\alpha \notin U$ e assim $\alpha \in (X - U)$. Como $x \notin X - U$, então $x \notin \bar{A}$.

2. Se $x \in \text{int}A$, então por definição, $x \in U$, onde U é um aberto contido em A . Reciprocamente, se $x \in U \subset A$, tal que U é aberto de X , então $U \subset \bigcup U_\lambda = \text{int}A$, onde U_λ são todos os abertos contidos em A . Logo, $x \in \text{int}A$.

Corolário 15. Se A, B são conjuntos tais que $A \subset B$, então $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Demonstração. Seja $x \in \bar{A}$ e U_x uma vizinhança arbitrária de x . Então $U_x \cap A \neq \emptyset$. Como $A \subset B$, então $U_x \cap B \neq \emptyset$. Logo, $x \in \bar{B}$.

Corolário 16. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Então $x \in \partial A$ se, e somente se, toda vizinhança U_x de x intercepta A e $X - A$. Equivalentemente, $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X - A}$.

Demonstração. Note que $x \in \partial A = \bar{A} - \text{int}A$ se, e somente se $x \in \bar{A}$ e $x \notin \text{int}A$. Da definição, isso acontece se, e somente se x intercepta A e, ao mesmo tempo, não está contido em A , ou seja, intercepta $X - A$.

Definição 17. Sejam X, Y dois espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é contínua quando para todo conjunto V aberto em Y , $f^{-1}(V)$ é aberto em X .

Exemplo. Toda função constante é contínua. Com efeito, sejam X, Y espaços topológicos, $y \in Y$ fixado e $f: X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = y$ para todo $x \in X$. Seja V aberto em Y . Se $y \notin V$, então $f^{-1}(V) = \emptyset$, o qual é aberto em X . Se $y \in V$, então $f^{-1}(V) = X$, o qual também é aberto em X . Logo, f é contínua.

Definição 18. Sejam X, Y dois espaços topológicos. Se existe $f: X \rightarrow Y$ contínua, bijetora, com inversa contínua, então f é chamada de homeomorfismo e os espaços X, Y são ditos homeomorfos.

Estando compreendidos os conceitos básicos de topologia, é possível definir a ideia de separação e a primeira e mais geral forma de conexidade. Daqui em diante, X será um espaço topológico.

Definição 19. Uma cisão de X é um par de conjuntos $A, B \subset X$, onde $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ e A, B são abertos em X .

Exemplo. Fazendo $X = \mathbb{R} - \{0\}$, temos que $(-\infty, 0), (0, \infty)$ formam uma cisão de X .

Todo conjunto possui pelo menos uma cisão: $X, \emptyset$. Isso porque ambos são abertos em X , disjuntos e sua união é o próprio X . Tal cisão é chamada de cisão trivial.

Definição 20. Dizemos que um conjunto é conexo quando a sua única cisão é a trivial.

Proposição 21. Sejam A e B conjuntos, tais que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Eles formam uma cisão de X se, e somente se, forem ambos fechados em X .

Demonstração. Sendo $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B$ é uma cisão de X se, e somente se, ambos são abertos em X . O resultado segue do fato de que $A = X - B$ e $B = X - A$. $\square$

Proposição 22. Seja $C \cup D = X$ uma cisão de X . Se $Y \subset X$ é conexo, então ou Y está contido inteiramente em C ou está contido inteiramente em D .

Demonstração. Note que $(C \cap Y), (D \cap Y)$ formam uma cisão de Y . Com efeito, ambos os conjuntos são abertos em Y pois C, D são abertos em X . Também $(C \cap Y) \cap (D \cap Y) = C \cap D \cap Y = \emptyset$, pois $C \cap D = \emptyset$. Ainda $(C \cap Y) \cup (D \cap Y) = Y \cap (C \cup D) = Y \cap X = Y$, pois $C \cup D = X$ e $Y \subset X$. Se ambos os conjuntos forem não vazios, então formam uma cisão não trivial, ou seja Y é não conexo. Logo, $C \cap Y$ ou $D \cap Y$ é vazio e, como $Y \subset X$, então $Y \subset C$ e $Y \cap D = \emptyset$, ou $Y \subset D$ e $Y \cap C = \emptyset$, como queríamos.

Teorema 23. A união de subconjuntos de X conexos com um ponto em comum é conexa.

Demonstração. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos conexos de X , tal que existe $x \in \bigcap A_\lambda$ para algum $x \in X$. Sejam $A = \bigcup A_\lambda$ e $C \cup D = A$ uma cisão de A . Temos que ou $x \in C$ ou $x \in D$. Sem perda de generalidade, suponhamos $x \in C$. Como cada A_λ é conexo e contém x , então, pela Proposição 22, $A_\lambda \subset C$ e $A_\lambda \cap D = \emptyset$. Logo $A = \bigcup A_\lambda \subset C$, implicando que $C = A$ e $D = \emptyset$.

Corolário 24. X é conexo se, e somente se, para todo $a, b \in X$ existe um conjunto conexo C_{ab} , tal que $a, b \in C_{ab} \subset X$.

Demonstração. Supondo X conexo, basta tomar $C_{ab} = X$ para quaisquer $a, b \in X$. Reciprocamente, seja $a \in X$ fixo. Para cada $x \in X$, existe $C_{ax} \subset X$ conexo, onde $a, x \in C_{ax}$. Vale que $X = \bigcup_{x \in X} C_{ax}$. Como cada C_{ax} é conexo e contém a , pelo Teorema 23, X é conexo.

Proposição 25. Seja $A \subset X$ um subconjunto conexo. Se B é tal que $A \subset B \subset \bar{A}$, então B é conexo.

Demonstração. Consultar Munkres (2014).

Consequentemente, como $A \subset \bar{A} \subset \bar{A}$, se A for conexo, seu fecho também o será.

Teorema 26. A imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é conexa.

Demonstração. Consultar Munkres (2014).

Imediatamente do teorema anterior, segue que X e Y são homeomorfos somente se ambos forem conexos ou ambos forem não conexos.

Um outro tipo de conexidade é a conexidade por caminhos. Para defini-la é necessário primeiro definir o que é um caminho.

Definição 27. Dados $x, y \in X$, um caminho de x à y em X é uma função $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ contínua, tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

Definição 28. Um conjunto X é dito conexo por caminhos se para todo $x, y \in X$ existe um caminho γ em X de x à y .

Exemplo. Toda bola na norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é conexa por caminhos. Com efeito, seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \epsilon\}$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \in \mathbb{R}^n$ estão fixados e $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Sejam $x, y \in B$. Tomemos $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(t) = t(y - x) + x$. Note que γ é contínua, $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Para mostrar que $\gamma([0, 1]) \subset B$, note que $\|\gamma(t) - a\| = \|t(y - x) + x - a\| = \|ty - tx + x - a\| = \|ty + (1 - t)x - a\| = \|ty + (1 - t)x - a + a - (1 - t)a - ta\| = \|t(y - a) + (1 - t)(x - a)\| \leq t\|y - a\| + (1 - t)\|x - a\| \leq t\epsilon + (1 - t)\epsilon = \epsilon$. Logo, $\|\gamma(t) - a\| \leq \epsilon$, ou seja $\gamma(t) \in B$.

Teorema 29. Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.

Demonstração. Seja X conexo por caminhos. Vamos mostrar que para cada $x, y \in X$ existe C_{xy} conexo, tal que $x, y \in C_{xy} \subset X$ e seguirá do Corolário 24 que X é conexo. Sejam $x, y \in X$. Então existe $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ contínua, tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. Fazendo $C_{xy} = \gamma([a, b])$, temos que C_{xy} está contido em X e é conexo, pois é imagem de um conexo sob uma função contínua.

Segue desse resultado e do exemplo anterior que toda bola euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é conexa.

Exemplo. Ao contrário da intuição, nem todo conjunto conexo é conexo por caminhos. De fato, sejam $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ e $S = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \mid x \in (0,1]\}$. O conjunto $\bar{S}$, chamado de "curva senoidal do topologista", é conexo, mas não é conexo por caminhos. A demonstração desse fato pode ser consultada em Munkres (2014).

Definição 30. Um espaço topológico X é dito localmente conexo em $x \in X$ se para toda vizinhança U_x de x , existe uma vizinhança V_x de x conexa, onde $V_x \subset U_x$. Mais ainda, X é dito localmente conexo se for localmente conexo em todos os seus pontos.

Exemplo. $X = \mathbb{R} - \{0\}$ não é conexo, mas é localmente conexo. Com efeito, sejam $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e U_x uma vizinhança de x . Como $\mathbb{R}$ é gerado por intervalos abertos e X é um subespaço de $\mathbb{R}$, então $U_x = \cup (I_\lambda \cap X) = \cup (I_\lambda - \{0\})$, tal que cada I_λ é um intervalo aberto da reta. Temos que $x \in I_{\lambda_0} - \{0\} \subset U_x$ para algum λ_0 . Se $x < 0$, fazemos $I_{\lambda_1} = I_{\lambda_0} \cap \mathbb{R}_*^+$ ou se $x > 0$, fazemos $I_{\lambda_1} = I_{\lambda_0} \cap \mathbb{R}_*^-$. Em ambos os casos, I_{λ_1} é conexo, pois é uma bola, e está contido em U_x , logo X é localmente conexo em x .

Exemplo. A curva senoidal do topologista é um conjunto conexo que não é localmente conexo. Esse fato pode ser verificado em Munkres (2014).

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foram apresentadas três diferentes noções de conexidade: a sua forma mais geral, a conexidade por caminhos e a conexidade local. Também, foi mostrado que todo conjunto conexo por caminhos também é conexo, ou seja, conexidade por caminhos é uma propriedade mais forte do que conexidade. Em contrapartida, a conexidade local não depende da conexidade, nem implica na mesma, pois existem conjuntos que são conexos, mas não são conexos localmente e vice-versa. Foi também apresentada uma ferramenta para verificar se um conjunto é ou não conexo, utilizando funções contínuas, acarretando no belo fato de que se dois conjuntos são homeomorfos, então ambos são conexos ou ambos não são conexos.

REFERÊNCIAS

LIMA, E. L. **Curso de Análise**: volume 2. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

MUNKRES, J. R. **Topology**. 2. ed. Londres: Pearson Education Limited, 2014