

## Os Limites da Intuição ao Lidar com o Infinito

### *Os Limites da Intuição ao Lidar com o Infinito*

Welinton Anderson Rocha<sup>1</sup>, Jéssica Buzatto Prudencio<sup>2</sup>, Marcelo Renan Augusto Ferreira<sup>3</sup>, Vanessa Cristina Rhea<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Professor da Universidade Estadual do Paraná – Campus Campo Mourão – e da Universidade Estadual de Maringá – Campus Maringá. Mestre em Matemática

<sup>2</sup> Professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná – Campus Paranavaí. Doutora em Matemática Pura

<sup>3</sup> Professor da Universidade Estadual de Maringá – Campus Maringá. Doutor em Matemática Aplicada

<sup>4</sup> Professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná – Campus Campo Mourão. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática

✉ [welintonrocha1998@gmail.com](mailto:welintonrocha1998@gmail.com), [jessica.prudencio@unespar.edu.br](mailto:jessica.prudencio@unespar.edu.br), [marceloraferreira@gmail.com](mailto:marceloraferreira@gmail.com), [vanessarhea@hotmail.com](mailto:vanessarhea@hotmail.com)

#### Palavras-chave:

Cardinalidade;  
Bijeções;  
Contagem.

#### Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar de maneira elucidativa a noção de “infinitos iguais” por meio do conceito de bijeção, que é uma associação um-a-um de um conjunto de elementos a outro. Para contextualizar o tema, voltamos ao tempo anterior à criação dos números, quando pastores associavam cada animal de seu rebanho a uma pedra, garantindo, ao final do dia, que nenhum animal havia sido perdido. Esse método rudimentar ilustra o princípio fundamental da bijeção: se é possível estabelecer uma relação um-a-um entre dois conjuntos, então eles possuem a mesma cardinalidade (quantidade de elementos). A partir dessa ideia, estendemos a discussão aos conjuntos infinitos, apresentando um exemplo contraintuitivo: o conjunto  $P$  dos números naturais pares e o conjunto  $N$  de todos os números naturais possuem a mesma cardinalidade. De início, tal afirmação parece absurda, uma vez que  $P$  é um subconjunto próprio de  $N$ . No entanto, ao construir uma bijeção explícita entre os elementos de  $P$  e  $N$ , demonstramos que estes possuem a mesma cardinalidade. Por meio desse e de outros exemplos, este estudo busca esclarecer o conceito de cardinalidade, destacando as peculiaridades dos conjuntos infinitos e desafiando noções intuitivas sobre tamanho e quantidade.

#### Keywords:

Cardinality;  
Bijections;  
Counting.

#### Abstract

This work aims to elucidate the notion of “equal infinities” through the concept of bijection, which is a one-to-one correspondence between two sets of elements. To contextualize the theme, we return to a time before the creation of numbers, when shepherds would associate each animal in their flock with a stone, ensuring at the end of the day that no animal had been lost. This rudimentary method illustrates the fundamental principle of bijection: if it is possible to establish a one-to-one correspondence between two sets, then they have the same cardinality (number of elements). Building on this idea, we extend the discussion to infinite sets, presenting a counterintuitive example: the set  $P$  of even natural numbers and the set  $N$  of all natural numbers have the same cardinality. At first, this statement seems absurd, since  $P$  is a proper subset of  $N$ . However, by constructing an explicit bijection between the elements of  $P$  and  $N$ , we demonstrate that they indeed have the same cardinality. Through this and other examples, this study seeks to clarify the concept of cardinality, highlighting the peculiarities of infinite sets and challenging intuitive notions of size and quantity.

---

## 1 INTRODUÇÃO

A afirmação de que "o conjunto dos números naturais pares possui a mesma cardinalidade que o conjunto de todos os números naturais" frequentemente causa estranhamento. Nossa intuição sugere que isso seria impossível, já que os números pares representam apenas um subconjunto próprio dos naturais (aparentemente, apenas sua "metade", mesmo que não faça sentido falar da metade de algo que é infinito, mas temos essa impressão por conta de os números pares virem de forma alternada no conjunto dos números naturais). Contudo, este trabalho demonstrará rigorosamente a veracidade dessa proposição, partindo de princípios primitivos de contagem até sua formalização matemática através do conceito de bijeção.

Algumas dessas noções são destacadas em Ifrah (2000), tais como entalhes em ossos de animais para contar o número de animais mortos por um caçador, contagem nos dedos das mãos, entre outras. A ideia de cada entalhe em um osso representar um animal morto é formalizada matematicamente pela noção de função bijetora. O que o caçador fazia era estabelecer uma bijeção entre o conjunto de entalhes e o conjunto dos animais, o que garante que há o mesmo número de entalhes no osso e de animais mortos. Em lezzi e Murakami (2013) temos a definição de função bijetora e em Lima (2019) temos a definição de conjuntos com mesmo número cardinal, que basicamente formaliza quando dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos.

O objetivo deste trabalho é utilizar esses conceitos primitivos de contagem e a formalização matemática de contagem por meio de bijeções, para mostrar que em se tratando de conjuntos infinitos, um subconjunto próprio pode ter a mesma cardinalidade do conjunto que o contém, desafiando a intuição e revelando a elegância da teoria dos conjuntos.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 A Noção Primitiva de Contagem

Desde os primórdios da civilização, a humanidade desenvolveu métodos rudimentares para contar objetos, como rebanhos ou itens comerciais. Ifrah (2000) documenta técnicas como: entalhes em ossos (cada marca representava um animal caçado) e agrupamento de pedras (cada pedra representava uma ovelha de um rebanho). Estes métodos estabeleciam, mesmo que intuitivamente, uma relação biunívoca entre dois conjuntos. No caso das pedras e ovelhas, temos dois conjuntos, o conjunto A das ovelhas do rebanho e o conjunto B das pedras. Se ao final do dia cada animal estava associado a uma, e uma única pedra, e não sobravam pedras, então o criador tinha a garantia de que nenhum animal havia sido perdido. Essa ideia é a essência da bijeção.

### 2.2 A Formalização Matemática da Contagem

A matemática moderna abstrai a noção primitiva de contagem através de funções.

**Definição 1** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é bijetora quando as duas condições a seguir são satisfeitas:

- $f$  é injetora, ou seja, sempre que  $f(x) = f(y)$ , tem-se que obrigatoriamente  $x = y$ ;
- $f$  é sobrejetora, ou seja, para todo elemento  $b$  do conjunto  $B$  existe um elemento  $a$  do conjunto

$A$  de modo que  $b = f(a)$ .

Notemos que esta é a formalização matemática para uma associação um-a-um dos elementos de A com os elementos de B. Neste sentido, temos a seguinte definição envolvendo a cardinalidade (quantidade de elementos) de conjuntos.

**Definição 2** Dizemos que dois conjuntos A e B têm mesma cardinalidade, indicando  $|A| = |B|$ , quando existe uma bijeção  $f : A \rightarrow B$ . Neste caso, dizemos que A e B são equipotentes.

**Exemplo 3** Consideremos um conjunto de pedras  $P = \{P_1, P_2, P_3\}$  e um conjunto de vacas  $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ . Podemos definir a função  $f : A \rightarrow B$  de modo que  $f(P_1) = V_1$ ,  $f(P_2) = V_2$  e  $f(P_3) = V_3$ . Deste modo, a função f é bijetora e, portanto, os conjuntos P e V têm mesma cardinalidade, ou seja, mesmo número de elementos.

Para conjuntos finitos A e B é natural verificar quando  $|A| = |B|$ , basta contar quantos elementos o conjunto A possui e quantos elementos o conjunto B possui, não é necessário estabelecer uma bijeção como no Exemplo 3. Para conjuntos infinitos é que a definição via bijeção se faz necessária.

**Exemplo 4** Consideremos o conjunto  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais e o conjunto  $M = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$  formado pelos negativos dos números naturais.

Considerando a função  $f : N \rightarrow M$  de modo que  $f(n) = -n$ , temos que esta é:

- injetora, pois se  $f(x) = f(y)$ , então  $-x = -y$ , garantindo que  $x = y$ ;
- sobrejetora, pois dado  $-n$  um elemento de M, temos que  $-n = f(n)$ .

Portanto, concluímos que  $|N| = |M|$ .

O Exemplo 4 ilustra uma situação intuitiva, pois é possível enxergar facilmente uma correspondência um-a-um entre os elementos de N e M. Além de que os conjuntos não possuem uma relação de inclusão entre si. O exemplo a seguir traz um caso que vai contra a intuição.

**Exemplo 5** Consideremos o conjunto  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais e o conjunto  $P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  dos números naturais pares.

A nossa intuição nos leva a concluir que a cardinalidade de P é menor que a cardinalidade de N, já que P é um subconjunto próprio de N, ou seja, é um subconjunto de N que não contém todos os elementos de N. Deste modo, quando nos deparamos a primeira vez com a afirmação  $|P| = |N|$ , isso nos causa um grande estranhamento.

Vamos construir uma bijeção entre  $f : N \rightarrow P$  e garantir matematicamente que  $|P| = |N|$ . Definimos tal função pela regra  $f(n) = 2n$ , ou seja, cada número natural está sendo associado a seu dobro.

1 – Suponhamos que  $f(x) = f(y)$ . Assim, temos  $2x = 2y$ . Dividindo ambos os lados dessa igualdade por 2, concluímos que  $x = y$  e, portanto, pela Definição 1 concluímos que f é injetora.

2 – Dado um elemento arbitrário b do conjunto P, sabemos que b é um número par. Pela definição de número par, temos que existe um elemento q natural de modo que  $b = 2q$ . Além disso, note que  $2q = f(q)$ . Portanto,  $b = f(q)$ , concluindo que f é sobrejetora conforme a Definição 1.

Logo, a função f é uma bijeção e, portanto, concluímos o desejado.

Na bijeção construída no exemplo anterior temos a “pedra” de número 0 em N sendo associada à “ovelha” de número 0 em P, a “pedra” 1 de N sendo associada à “ovelha” 2 de P,  $2 \in N$  sendo associado a  $4 \in P$ , e assim sucessivamente, de modo que temos cada elemento de N associado a um, e apenas um, elemento de P, garantindo assim que estes conjuntos possuem “a mesma quantidade de elementos”.

**Exemplo 6** Agora que já não é mais um espanto o fato de que um subconjunto próprio pode ter a mesma cardinalidade que o conjunto que o contém, vamos demonstrar que  $|N| = |Z|$ , em que  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  é o conjunto dos números naturais e  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  é o conjunto dos números inteiros.

Vamos definir uma função  $g : Z \rightarrow N$  dividindo inicialmente o conjunto  $Z$  em duas partes distintas, a parte formada pelos números maiores ou iguais a zero e a parte formada pelos números menores que zero. Caso um número inteiro  $n$  seja maior ou igual a zero, vamos definir que  $g(n) = 2n$ . Caso um número inteiro  $n$  seja menor que zero, vamos definir que  $g(n) = -2n - 1$ .

Essa associação está sendo feita de modo que  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 2$ ,  $g(2) = 4$  e assim por diante, ou seja, os números inteiros maiores ou iguais a zero estão sendo levados aos números naturais pares. Além disso, temos as igualdades  $g(-1) = 1$ ,  $g(-2) = 3$ ,  $g(-3) = 5$  e assim por diante, ou seja, os números inteiros negativos estão sendo levados aos números naturais ímpares.

Vamos garantir que essa função é bijetora para concluirmos que  $|Z| = |N|$ .

1 – Suponhamos que  $g(x) = g(y)$ . A partir dessa igualdade, temos que os números  $g(x)$  e  $g(y)$  possuem mesma paridade, ou seja, ambos são pares ou ambos são ímpares (esta informação é útil para que saibamos qual foi a operação utilizada para calculá-los).

– Caso  $g(x)$  e  $g(y)$  sejam números pares, então pela forma com que a função foi construída temos que  $x$  e  $y$  são maiores ou iguais a zero e, além disso,  $2x = 2y$ . Dividindo esta última igualdade por 2 em ambos os lados concluímos que  $x = y$ .

– Caso  $g(x)$  e  $g(y)$  sejam números ímpares, então temos que  $x$  e  $y$  são menores que zero e  $-2x - 1 = -2y - 1$ . Assim, somando 1 em ambos os lados dessa igualdade obtemos  $-2x = -2y$  e, portanto, ao dividir ambos os lados por -2 obtemos  $x = y$ .

Em ambos os casos concluímos que  $x = y$ . Portanto, pela Definição 1 temos que  $g$  é injetora.

2– Dado um número natural  $b$ , temos duas possibilidades.

2.1 – Caso  $b$  seja par, temos pela definição de número par que  $b = 2n$ , para algum  $n$  natural. Assim,  $b = g(n)$ .

2.2 – Caso  $b$  seja ímpar, temos que  $b = 2n - 1$ , para algum natural  $n$  maior ou igual a 1. Assim,  $b = (-2)(-n) - 1 = g(-n)$ . Como  $-n$  é um número inteiro, concluímos que  $b$  é imagem do número inteiro  $-n$  pela função  $g$ .

Em ambos os casos,  $b$  é atingido pela função, concluindo pela Definição 1 que  $g$  é sobrejetora. Como já havíamos concluído que  $g$  é injetora, concluímos, portanto, que  $g$  é bijetora e que  $|Z| = |N|$ .

**Exemplo 7** Considerando a bijeção dada pela composição das funções  $f$  e  $g$  dos exemplos 5 e 6, temos uma bijeção  $f \circ g : Z \rightarrow P$  do conjunto dos números inteiros no conjunto dos números naturais pares. Portanto,  $|Z| = |P|$ .

Esse é um exemplo que explora a propriedade transitiva da igualdade de cardinalidades.

**Exemplo 8** Podemos generalizar o Exemplo 5 para o conjunto dos múltiplos de qualquer número natural não nulo  $a$ . De fato, consideremos o conjunto  $aN$  dado pelos múltiplos naturais do número não nulo  $a$ .

Podemos construir a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow a\mathbb{N}$  de modo que  $f(n) = an$ . De modo análogo ao Exemplo 5, podemos mostrar que essa é uma bijeção e, portanto,  $|a\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ .

**Definição 9** Um conjunto  $A$  é dito enumerável se  $A$  é um conjunto finito, ou se  $A$  é infinito e existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ , em que  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais.

A seguir citamos dois exemplos que fogem ainda mais da intuição.

**Exemplo 10** O conjunto  $\mathbb{Q}$  formado por todos os números da forma  $\frac{a}{b}$ , em que  $a$  e  $b$  são números inteiros, com  $b$  não nulo, é chamado de conjuntos dos números racionais. Este é um conjunto enumerável, ou seja, existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

**Exemplo 11** O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais é um conjunto não enumerável, ou seja, não existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para detalhes destes exemplos veja, por exemplo, Lima (2019).

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho explorou uma propriedade contraintuitiva da cardinalidade infinita, demonstrando por meio de métodos de contagem primitivos como conjuntos aparentemente desiguais podem ser equipotentes. A partir de métodos primitivos de contagem, como os entalhes em ossos descritos por (IFRAH, 2000) até a formalização matemática das funções bijetoras, percorremos um caminho que desafia intuições arraigadas sobre tamanho e quantidade.

### REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar: Funções**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 1.

IFRAH, Georges. **The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer**. Translated by David Bellos, E. F. Harding, Sophie Wood, and Ian Monk. New York: Wiley, 2000.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise: Volume 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.