

Resumos Expandidos

O Puzzle 8: condições de resolubilidade

Puzzle 8: Solvability Conditions

Jéssica Buzatto Prudencio¹, Marcelo Renan Augusto Ferreira², Vanessa Cristina Rhea³, Welinton Anderson Rocha⁴

¹ Professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná - Campus Paranavaí. Doutora em Matemática Pura

² Professor da Universidade Estadual de Maringá - Campus Maringá. Doutor em Matemática Aplicada

³ Professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná - Campus Campo Mourão. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática

⁴ Professor da Universidade Estadual do Paraná - Campus Campo Mourão - e da Universidade Estadual de Maringá - Campus Maringá. Mestre em Matemática

✉ jessica.prudencio@unespar.edu.br, marceloraferreira@gmail.com, vanessarhea@hotmail.com, welintonrocha1998@gmail.com

Palavras-chave:

Jogo;
Quebra-cabeça;
Permutação;
Paridade.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo investigar matematicamente as condições de resolubilidade do quebra-cabeça Puzzle 8, com base na teoria de permutações e suas paridades. O Puzzle 8 consiste em um tabuleiro 3×3 contendo 8 peças numeradas de 1 a 8 e uma única lacuna vazia, permitindo o deslocamento das peças adjacentes. O objetivo do jogo é ordenar as 8 peças em ordem crescente de acordo com suas numerações. Embora o desafio pareça puramente recreativo, há uma estrutura matemática que determina se uma configuração inicial pode ou não ser solucionada. Utilizando um modelo matemático formal do quebra-cabeça por meio de permutações, investiga-se a paridade de cada configuração e demonstra-se que ela, combinada à posição da lacuna, constitui um invariante que determina a possibilidade de se alcançar a configuração final ordenada. Como resultado, prova-se que existem possíveis configurações do tabuleiro que são irresolúveis, independentemente dos movimentos realizados. O estudo pode contribuir para a compreensão de como conceitos matemáticos abstratos, como paridade e invariância, se aplicam a problemas concretos e pode ser explorado como ferramenta didática para o ensino e aprendizagem de matemática.

Keywords:

Game;
Puzzle;
Permutation;
Parity.

Abstract

This study aims to mathematically investigate the solvability conditions of the Puzzle 8, based on permutation theory and their parities. The Puzzle 8 consists of a 3×3 board containing 8 numbered tiles (from 1 to 8) and a single empty space, allowing the movement of adjacent tiles. The objective of the game is to arrange the 8 tiles in ascending numerical order. Although the challenge may seem purely recreational, there is a mathematical structure that determines whether an initial configuration can be solved or not. Using a formal mathematical model of the puzzle through permutations, the parity of each configuration is examined, and it is shown that this, combined with the position of the empty space, constitutes an invariant that determines the possibility of reaching the ordered final configuration. As a result, it is proven that there are possible board configurations that are unsolvable, regardless of the moves performed. The study contributes to understanding how abstract mathematical concepts, such as parity and invariance, apply to concrete problems and can be explored as a didactic tool for teaching and learning mathematics.

1 INTRODUÇÃO

O Puzzle 8 é um quebra-cabeça deslizante composto por uma estrutura quadrada de 3 linhas por 3 colunas (totalizando 9 posições), contendo 8 peças móveis numeradas de 1 a 8 e uma lacuna vazia, que permite o movimento das peças adjacentes. Além disso, as peças podem deslizar horizontal ou verticalmente para a posição da lacuna vazia e nenhuma peça pode ser retirada do tabuleiro.

O objetivo do Puzzle 8 é ordenar as peças numeradas em ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo, deixando a lacuna vazia na última posição (inferior direita). A configuração final correta é dada na Figura 1.

Figura 1 - Configuração Solucionada do Puzzle 8

1	2	3
4	5	6
7	8	

Fonte: os autores.

O Puzzle 8 foi criado e popularizado pelo matemático americano Noyes Palmer Chapman em 1874 (BALOGUN *et al.*, 2024) e consiste em uma versão condensada do Puzzle 15, quebra-cabeça que ficou muito mais popular anos depois. Em 1914, o matemático americano Sam Loyd (criador de puzzles e charadas matemáticas como "Trick Donkeys" e "Get off the Earth Puzzle") apresentou em Loyd (1914) o Puzzle 15 com a posição inicial ordenada, porém com os números quatorze e quinze trocados e lançou uma proposta oferecendo mil dólares para quem conseguisse resolver o problema. Baseados nisso, veremos se é possível ou não resolver o Puzzle 8 com a posição inicial dada de forma ordenada, porém com duas peças consecutivas invertidas.

Como em outros problemas, existe um modelo matemático para esse jogo. Nosso objetivo é mostrar matematicamente, por meio da teoria de grupos de permutações, que o Puzzle 8 se torna insolúvel após a formação inicial proposta com a troca das peças citadas.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Procedimentos Metodológicos

Esta pesquisa é de natureza básica, com abordagem teórica e qualitativa, voltada à demonstração matemática de propriedades que regem a resolubilidade do quebra-cabeça Puzzle 8. O método de investigação adotado é dedutivo, partindo de definições e resultados estabelecidos na teoria de permutações para analisar a estrutura do quebra-cabeça e formular critérios de solução.

A pesquisa foi conduzida nas seguintes etapas: estudo da noção de paridade de permutações; o modelo matemático do Puzzle 8; análise da impossibilidade de solução para certas configurações iniciais, com base na preservação da paridade das permutações e na impossibilidade de obter permutações de paridade distinta por movimentos válidos; sistematização dos resultados.

2.2 O Grupo de Permutações

Iniciamos esta seção apresentando alguns resultados sobre o Grupo de Permutações, que são necessários para a resolução do problema proposto. Para um aprofundamento no tópico, veja (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

Sejam X um conjunto qualquer, n um número inteiro positivo e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in X$. Seja S_n o conjunto de todas as aplicações bijetoras do conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ nele próprio. Cada elemento $\sigma \in S_n$ pode ser representado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \sigma(x_3) & \cdots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}.$$

O conjunto S_n munido da operação composição de aplicações é um grupo, chamado de grupo de permutações de X . Denotaremos seu elemento neutro por Id .

Definição 1 Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = X$. Se $\sigma \in S_n$ é tal que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = \sigma^2(a_1) = a_3$, $\dots$, $\sigma(a_{r-1}) = \sigma^{r-1}(a_1) = a_r$, $\sigma(a_r) = \sigma^r(a_1) = a_1$ e $\sigma(x) = x$ para todo $x \in X - \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, então dizemos que σ é um ciclo de comprimento r e escrevemos $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_r)$. Se $r = 2$, então σ é chamada de transposição.

Notemos que toda transposição é invertível e sua inversa é ela mesma.

Proposição 2 Para $n \geq 2$, toda permutação de S_n pode ser escrita como um produto de transposições. Demonstração: Vamos aplicar o princípio de indução sobre n . Se $n = 2$, então $S_n = \{Id, (1\ 2)\}$. Mas note que $Id = (1\ 2)(1\ 2) = (1\ 2)^2$. Logo, $S_2 = \{(1\ 2)(2\ 1), (1\ 2)\}$. Suponhamos $n \geq 2$, e $\sigma \in S_n$. Denotemos $k = \sigma(n)$ e $\psi = (kn)$. Então $(\psi \circ \sigma)(n) = \psi(k) = n$, ou seja, $\psi \circ \sigma$ fixa n . Logo, podemos olhar para $\psi \circ \sigma$ como uma permutação de S_{n-1} . Por hipótese de indução, existem transposições de S_n que fixam n , tais que

$$\psi \circ \sigma = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3 \circ \cdots \circ \psi_s.$$

Portanto, $\sigma = \psi^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3 \circ \cdots \circ \psi_s$.

Exemplo 3 Em S_3 com $X = \{1, 2, 3\}$, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) = (3\ 2)(1\ 2).$$

Observação 4 Se uma permutação pode ser escrita como produto par de transposições, então todas as outras formas nas quais ela pode ser escrita como produto de transposições também resultará em uma quantidade par de transposições. Analogamente para produto ímpar de transposições. Para uma demonstração completa desse fato, veja (DOMINGUES; IEZZI 2003). Isso motiva a definição seguinte.

Definição 5 Dizemos que uma permutação $\sigma \in S_n$ é par, se o número de fatores de uma fatoração de σ como produto de transposições é par. Caso contrário, dizemos que σ é ímpar.

Proposição 6 Se $n \geq 2$, o conjunto A_n de todas as permutações pares de n objetos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um subgrupo de S_n .

Demonstração: Veja (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

Por comodidade, daqui em diante, usaremos a notação $\zeta \circ \sigma = \zeta\sigma$.

2.3 Matematização do Puzzle

Modelamos o Puzzle 8 e apresentamos como se dão, matematicamente, as soluções do quebra-cabeça. Consideremos um puzzle com a posição dada como na Figura 2, onde cada x_i é um único número no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Podemos associar a cada posição do puzzle uma ordenação, ignorando o espaço vazio e lendo os números "em serpente".

Figura 2 - Posicionando os números "em serpente".

x_1	x_2	x_3
x_6	x_5	x_4
x_7	x_8	

Fonte: os autores.

A cada movimento feito no tabuleiro é realizada uma troca de ordenação (a partir da ordenação anterior), gerando assim uma permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \sigma(x_3) & \sigma(x_4) & \sigma(x_5) & \sigma(x_6) & \sigma(x_7) & \sigma(x_8) \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 0.2, pode ser escrever σ como produto de transposições.

Observemos que fazer nada e mudar os elementos na horizontal corresponde à identidade de S_8 , que é uma permutação par. Observemos também que não são quaisquer movimentos que podem ser feitos. Os movimentos permitidos são aqueles em que placas adjacentes à posição vazia podem ser movimentadas horizontalmente ou verticalmente.

Vamos verificar então, qual a característica dos movimentos que nos são permitidos fazer, analisando as possíveis posições do espaço vazio.

Caso 1. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 3.

Figura 3 - Caso 1

	x_1	x_2
x_5	x_4	x_3
x_6	x_7	x_8

Fonte: os autores.

Movimentando o elemento x_5 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} = (x_1 x_5 x_4 x_3 x_2) = (x_3 x_2)(x_4 x_2)(x_5 x_2)(x_1 x_2),$$

que é par.

Caso 2. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 4.

Figura 4 - Caso 2

x_1		x_2
x_5	x_4	x_3
x_6	x_7	x_8

Fonte: os autores.

Movimentando o elemento x_4 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & x_4 & x_2 & x_3 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} = (x_2 \ x_4 \ x_3) = (x_4 \ x_3)(x_2 x_3),$$

que é par.

Caso 3. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 5.

Figura 5 - Caso 3

x_1	x_2	
x_5	x_4	x_3
x_6	x_7	x_8

Fonte: os autores.

Notemos que qualquer movimentação possível neste caso corresponde à permutação identidade, que é par.

Caso 4. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 6.

Figura 6 - Caso 4

x_1	x_2	x_3
	x_5	x_4
x_6	x_7	x_8

Fonte: os autores.

Movimentando o elemento x_1 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5) = (x_4 x_5)(x_3 x_5)(x_2 x_5)(x_1 x_5),$$

que é par.

Observemos que mover o elemento x_6 para o espaço vazio, resulta no movimento dado pela identidade, que é uma permutação par.

Caso 5. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 7.

Figura 7 - Caso 5

x_1	x_2	x_3
x_5		x_4
x_6	x_7	x_8

Fonte: os autores.

Movimentando o elemento x_2 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} = (x_2 x_3 x_4) = (x_3 x_4)(x_2 x_4),$$

que é par.

Agora, movimentando o elemento x_7 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_7 & x_5 & x_6 & x_8 \end{pmatrix} = (x_5 x_7 x_6) = (x_7 x_6)(x_5 x_6),$$

que também é par.

Caso 6. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 8.

Figura 8 - Caso 6

x_1	x_2	x_3
x_5	x_4	
x_6	x_7	x_8

Fonte: os autores.

Movimentando o elemento x_8 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_8 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix} = (x_4 x_8 x_7 x_6 x_5) = (x_6 x_5)(x_7 x_5)(x_8 x_5)(x_4 x_5),$$

que é par.

Observemos que mover o elemento x_3 para o espaço vazio, resulta no movimento dado pela identidade, que é uma permutação par.

Caso 7. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 9.

Figura 9 - Caso 7

x_1	x_2	x_3
x_6	x_5	x_4
	x_7	x_8

Fonte: os autores.

Notemos que qualquer movimentação possível neste caso corresponde à permutação identidade, que é par.

Caso 8. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 10.

Figura 10 - Caso 8

x_1	x_2	x_3
x_6	x_5	x_4
x_7		x_8

Fonte: os autores.

Movimentando o elemento x_5 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & x_5 & x_8 \end{pmatrix} = (x_5 x_6 x_7) = (x_6 x_7)(x_5 x_7),$$

que é par.

Caso 9. Consideremos o espaço vazio posicionado como na Figura 11 .

Figura 11 - Caso 9

x_1	x_2	x_3
x_6	x_5	x_4
x_7	x_8	

Fonte: os autores.

Movimentando o elemento x_4 para o espaço vazio, temos a seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_4 \end{pmatrix} = (x_4 x_5 x_6 x_7 x_8) = (x_7 x_8)(x_6 x_8)(x_5 x_8)(x_4 x_8),$$

que é par.

Agora, vejamos se é possível ou não resolver o problema proposto com duas peças adjacentes invertidas e o porquê.

Observemos que todos os movimentos possíveis analisados nos casos de 1 a 9 resultam em composição de permutações pares e, portanto, são permutações pares.

Tomemos o puzzle com a posição inicial dada de forma ordenada, mas com duas peças consecutivas invertidas. Essa permutação fixa todas as posições, exceto as que foram invertidas e temos então uma transposição da forma $(x_i x_{i+1})$, com $i \in \{1, \dots, 7\}$, que é uma permutação ímpar. Como A_n é um subgrupo de S_n , a inversa de toda permutação par é também uma permutação par.

Portanto, não é possível chegar na solução inicial a partir da configuração proposta com duas peças consecutivas invertidas.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Olhando para a paridade das permutações que caracterizam os movimentos permitidos do Puzzle 8, concluímos que é impossível resolvê-lo a partir da forma inicial com duas peças consecutivas invertidas. Isso se deve ao fato de a paridade das permutações ser um invariante nas movimentações permitidas de peças.

O estudo aqui apresentado contribui para a compreensão de como conceitos matemáticos abstratos, como paridade e invariante, se aplicam a problemas concretos e pode ser explorado como ferramenta didática para o ensino de álgebra e raciocínio lógico.

REFERÊNCIAS

BALOGUN, G. B.; BISAGBA, D.; BAJEH, A.; DEBO, T. O.; MUYIDEEN, A.; PETER, O. J. Comparative analysis of AI-based search algorithms in solving 8 puzzle problems. **Bulletin of the National Research Centre**, v. 48, n. 1, p. 119, 2024. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1186/s42269-024-01274-3>. Acesso em 14 jul. 2025.

DOMINGUES, H H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual reform., 2003.

LOYD, S. Cyclopedia of Puzzle. **The Lamb Publishing Company**, New York, 1914. Disponível em: <https://www.mathpuzzle.com/loyd/Thumbnails.html>. Acesso em: 03 jul. 2025.