

Erros e aprendizagens no estudo do domínio de uma função de duas variáveis

Errors and learning in the study of the domain of a function of two variables

Jhony Henrique Zanella¹, Daniela Barbieri Vidotti²

¹ Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar) – Campus de Paranavaí

² Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática (UEM), Docente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranavaí (UNESPAR)

✉ jhowzanella912@gmail.com, daniela.barbieri@unespar.edu.br

Palavras-chave:

Tangram;
Geometria Euclidiana
Plana;
Ensino de Matemática;
Material manipulável;
Aprendizagem.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo relatar e refletir sobre como um erro matemático cometido por um estudante ao determinar o domínio de uma função de duas variáveis pode ser explorado como instrumento de aprendizagem. Para isso, consideramos explorações realizadas em uma aula da disciplina de Cálculo em Várias Variáveis, do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranavaí, na qual se propunha discutir os erros cometidos pelos estudantes em uma avaliação escrita. Entendemos que os erros matemáticos cometidos pelos estudantes podem ser explorados em sala de aula como fonte de novas descobertas. Nesse sentido, conforme Borasi (1996) e Cury (2008), considera-se a possibilidade de que o erro se transforme em um problema para que os alunos, mediados pelo professor, trabalhem em busca de soluções que promovam a aprendizagem. Com essa intencionalidade, a docente solicitou que um dos alunos (primeiro autor do trabalho) apresentasse no quadro a sua solução para uma questão que solicitava o domínio da função de duas variáveis definida por $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. A resposta apresentada foi o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 16y^2) \leq 16\}$, na qual o estudante esclareceu que precisava verificar que o radicando deveria ser maior ou igual a zero e para tanto considerou que: como 16 está fixo e é positivo, então o restante da expressão $(x^2 - 16y^2)$ deveria resultar em 16 ou menos para que o valor da raiz quadrada fosse um número real. A partir disso, a docente convidou os alunos a investigarem se esta estratégia estava correta, pois aparentemente fazia sentido. Primeiramente, um dos alunos foi ao quadro e fez a seguinte justificativa: se chamarmos de $a = x^2 - 16y^2$ então a função pode ser escrita por $f(x, y) = \sqrt{16 - a}$, e neste caso, para determinar o domínio deve-se considerar que $16 - a \geq 0$, ou seja, $16 \geq a$ ou $a \leq 16$. Dessa forma, concluiu que a estratégia apresentada pelo estudante estava correta. Contudo, a professora questionou se a função f realmente poderia ser escrita daquela forma, e no quadro, juntamente com os alunos, convidou-os a analisarem, escrevendo $16 - a = 16 - (x^2 - 16y^2) = 16 - x^2 + 16y^2$. A partir destas igualdades, observaram uma diferença no sinal da expressão inicial que definia a função f levando-os a identificarem que $16 - x^2 - y^2 \neq 16 - (x^2 - y^2)$, ou seja, não se pode colocar os parênteses na expressão algébrica sem efetuar o jogo de sinais. Dessa forma, o estudante, juntamente com a turma, compreendeu o erro ao mesmo tempo em que valorizou a estra-

tégia utilizada, a qual poderia ter levado à resposta correta. Para isso, era preciso considerar $16 - x^2 - y^2 = 16 - (x^2 + y^2)$, resultando que o domínio é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + 16y^2) \leq 16\}$. Destacamos, neste breve relato, a importância de valorizar as produções realizadas pelos alunos em sala de aula, com intervenções semelhantes a esta, especialmente nas aulas de Cálculo, nas quais é comum que eles se sintam incapazes de justificar suas respostas, devido ao nível de abstração dos conceitos abordados na disciplina. Ao invés de corrigir a questão no quadro, a docente optou por explorar a resposta dada pelo estudante, validando a sua produção e levando-o a compreender onde e por que errou. Nesta abordagem, verificamos que diversos conhecimentos foram mobilizados: o conceito de domínio de funções de várias variáveis, manipulações algébricas, raciocínio lógico, entre outros.

Keywords:

Tangram;
Planar Euclidean Geometry;
Mathematics Teaching;
Manipulative Material;
Learning.

Abstract

This work aims to report and reflect on how a mathematical error made by a student when determining the domain of a function of two variables can be explored as a learning tool. To this end, we considered explorations carried out in a class of Multivariable Calculus, part of the Mathematics Teaching degree at the State University of Paraná – Paranavaí Campus, in which the objective was to discuss the mistakes made by students in a written exam. We understand that mathematical errors committed by students can be explored in the classroom as sources of new discoveries. In this sense, according to Borasi (1996) and Cury (2008), it is possible for an error to become a problem so that students, guided by the teacher, work in search of solutions that promote learning. With this intent, the instructor asked one of the students (the first author of this paper) to present on the board his solution to a question that asked for the domain of the two-variable function defined by $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. The answer presented was the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 16y^2) \leq 16\}$, in which the student explained that it was necessary to verify that the radicand should be greater than or equal to zero, and to do so, he considered that since 16 is fixed and positive, the remaining expression $(x^2 - 16y^2)$ should result in 16 or less so that the square root value would be a real number. From this, the instructor invited the students to investigate whether this strategy was correct, as it seemingly made sense. First, one of the students went to the board and justified: if we let $a = x^2 - 16y^2$, then the function can be written as $f(x, y) = \sqrt{16 - a}$, and in this case, to determine the domain, we must consider that $16 - a \geq 0$, that is, $16 \geq a$ or $a \leq 16$. Thus, he concluded that the strategy presented by the student was correct. However, the instructor questioned whether the function f could indeed be written in that way, and on the board, together with the students, she invited them to analyze by writing $16 - a = 16 - (x^2 - 16y^2) = 16 - x^2 + 16y^2$. From these equalities, they observed a sign difference in the initial expression that defined the function f , leading them to identify that $16 - x^2 - y^2 \neq 16 - (x^2 - y^2)$, that is, parentheses cannot be inserted in the algebraic expression without performing the proper sign changes. Thus, the student, along with the class, understood the error while also valuing the strategy used, which could have led to the correct answer. For that, it was necessary to consider $16 - x^2 - y^2 = 16 - (x^2 + y^2)$, resulting in the domain being the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + 16y^2) \leq 16\}$. In this brief report, we highlight the importance of valuing students' productions in the classroom through interventions such as this one, especially in Calculus classes, where it is common for students to feel incapable of justifying their answers due to the abstract nature of the concepts addressed in the course. Instead of simply correcting the question on the board, the instructor chose to explore the student's response, validating his reasoning and guiding him to understand where and why he was wrong. In this approach, various types of knowledge were mobilized: the concept of the domain of multivariable functions, algebraic manipulation, logical reasoning, among others.

REFERÊNCIAS

BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction: a focus on erros**. Norwood, New Jersey: Ablex. Publishing Corporation, 1996.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.