

Resumos Expandidos

Calculando fatoriais de números reais com a função Gama

Calculating factorials of real numbers with the Gamma function

Lucas Henrique Mendes Alves¹, Karla Horrana Tenorio Sacani², Franchesco Sanches dos Santos³, Marcos Vinicius de Oliveira Peres⁴

¹ Especialista em Educação do Futuro pela UniFatecie. Tutor pedagógico na UniFatecie

² Mestre em Bioestatística - UEM

³ Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas – PUC/PR

⁴ Doutor em Ciências – FMRP/USP, Professor Adjunto do Departamento de Estatística – UEM

✉ lucas.henriquem77@gmail.com, karlahorranas@gmail.com, franchesco.sanches@gmail.com, mvoperes@uem.br

Palavras-chave:

Funções especiais;
Integral imprópria;
Interpolação de fatoriais.

Resumo

As funções desempenham um papel fundamental na matemática. Para além das funções tradicionais, existem diversas funções especiais, entre as quais há a função Gama. Trata-se de uma importante função especial que estende o conceito de fatorial para números reais positivos (e para complexos). Por meio de uma definição baseada em uma integral imprópria, ela permite o cálculo contínuo de fatoriais, viabilizando sua aplicação em contextos nos quais o fatorial tradicional não é definido, como para números não inteiros. Este trabalho tem o objetivo de apresentar um breve estudo introdutório sobre a função Gama, incluindo uma de suas construções, um estudo sobre o domínio da função, algumas de suas principais propriedades e breves comentários sobre aplicações. Apesar de pouco abordada nos currículos escolares, a função Gama revela-se essencial em áreas avançadas da matemática, como análise real, estatística, física teórica e teoria dos números, demonstrando sua versatilidade, profundidade conceitual e importância histórica no desenvolvimento da matemática.

Keywords:

Special functions;
Improper integral;
Factorial interpolation.

Abstract

Functions play a fundamental role in mathematics. Beyond traditional functions, there are several special functions, among which is the Gamma function. This is an important special function that extends the concept of factorial to positive real numbers (and to complex numbers). Through a definition based on an improper integral, it allows for the continuous calculation of factorials, enabling its application in contexts where the traditional factorial is not defined, such as for non-integer numbers. This work aims to present a brief introductory study on the Gamma function, including one of its constructions, a study of the function's domain, some of its main properties, and brief comments on applications. Although rarely addressed in school curricula, the Gamma function proves to be essential in advanced areas of mathematics such as real analysis, statistics, theoretical physics, and number theory, demonstrating its versatility, conceptual depth, and historical importance in the development of mathematics.

1 INTRODUÇÃO

As funções desempenham um papel central na matemática. É comum estudarmos funções como as lineares, quadráticas, exponenciais e trigonométricas, amplamente conhecidas e aplicadas. No entanto,

existem outras funções menos populares, mas de grande importância teórica e prática. Uma dessas funções é a chamada função Gama, que surgiu a partir da busca por uma generalização do fatorial para números reais. O matemático Leonhard Euler procurava uma função real que interpolasse os pontos $(x, x!)$ para valores inteiros positivos de x , e a partir de seus estudos, no século XVIII, formulou uma expressão que hoje conhecemos como função Gama.

Desde então, mesmo sendo pouco conhecida fora dos meios mais especializados, a função Gama passou a ocupar um papel relevante em diversas áreas da matemática, como análise, estatística, teoria dos números e física teórica, tornando-se um dos pilares das chamadas funções especiais.

Neste trabalho, tem como objetivo estudar essa função notável, também chamada de função Gama de Euler, explorando sua definição, propriedades fundamentais e algumas de suas aplicações mais importantes. Destaca-se, que nesse trabalho vamos fazer uma breve apresentação da função Gama. Mais detalhes, e outras formas para expressar a função Gama, podem ser consultados, por exemplo, em Sebah (2002), Oliveira (2012) e Melo (2020).

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 A função Gama

Para iniciar a construção da função Gama, vamos tomar como partida a seguinte construção. É bem conhecido que

$$\int_0^{+\infty} e^{-z} dz = [-e^{-z}]_0^{+\infty} = 1$$

Fazendo a mudança de variável $z = st$, com $t > 0$ constante, temos $dz = t ds$, obtemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-z} dz = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t ds = t \int_0^{+\infty} e^{-st} ds = 1$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} ds = \frac{1}{t}, \text{ para todo } t > 0$$

Derivando a relação anterior em relação a t e empregando a fórmula de Leibniz

$$\frac{d}{dx} \int_a^b F(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dy$$

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e^{-st} ds = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-st}) ds = \int_0^{+\infty} -s \cdot e^{-st} ds = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} s \cdot e^{-st} ds = \frac{1}{t^2}$$

Derivando novamente em relação a t , obtemos

$$\int_0^{+\infty} s^2 e^{-st} ds = \frac{1 \cdot 2}{t^3} = \frac{2!}{t^3}$$

De forma geral, derivando sucessivas vezes em relação a t , encontramos

$$\int_0^{+\infty} s^n e^{-st} ds = \frac{n!}{t^{n+1}}, \text{ para todo } t > 0$$

Finalmente, fazendo $t = 1$, obtemos

$$\int_0^{+\infty} s^n e^{-s} ds = n! \quad (1)$$

Assim, encontramos uma expressão que, em vez do tradicional produtório para calcular $n!$, o qual faz sentido apenas para n inteiro, admite uma formulação que se estende naturalmente para valores não inteiros da variável. Dessa forma, a função $g(x)$ definida por

$$g(x) = \int_0^{+\infty} s^x e^{-s} ds$$

é bem definida para valores reais (e até complexos, veja Barata (2025)) de x , e, conforme a expressão (1), satisfaz $g(n) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

No entanto, a literatura, reconheceu uma definição levemente diferente dessa função $g(x)$ como sendo a famosa função Gama. A forma mais conhecida da função Gama, função Gama de Euler, é dada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2)$$

Note que a expressão para $\Gamma(x)$ é equivalente à função $g(x)$, mas deslocada de uma unidade, isto é, $\Gamma(x) = g(x - 1)$. Essa forma deslocada tornou-se comum na literatura, pois apresenta propriedades relevantes. Assim, considerando as equações (1) e (2) e a conceito do deslocamento de uma unidade, podemos dizer sem perda de generalidade que

$$n! = \Gamma(n + 1) \text{ ou } \Gamma(n) = (n - 1)! \quad (3)$$

Um fato curioso, é que na verdade, foi Daniel Bernoulli quem, em 1729, apresentou a primeira representação de uma função interpoladora dos fatoriais na forma de um produto infinito, posteriormente conhecida como função Gama. Euler, apresentou uma representação semelhante de função interpoladora. Porém, Euler fez muito mais, ele forneceu outras representações por integrais e formulou teoremas importantes sobre as propriedades dessa função (Gronau, 2003).

2.2 Domínio da função Gama

Primeiramente, estudar o domínio da função (2) para $x > 0$. Para verificar isso, escrevemos:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

A segunda integral converge para qualquer valor de x , pois $e^{-t} \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, de modo que qualquer eventual crescimento de t^{x-1} é neutralizado. Contudo, na primeira integral, com $0 \leq t \leq 1$, a função e^{-t} fica limitada por 1, isto é, $0 < e^{-t} \leq 1$. Assim, a convergência da integral depende apenas do comportamento de t^{x-1} em torno de $t = 0$. Vejamos:

(a) Para $x > 0$, temos

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x} < \infty$$

isto é, a integral converge para $x > 0$.

(b) Para $x = 0$, temos

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \int_0^1 t^{-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \infty$$

assim a integral diverge para $x = 0$.

(c) Para $x < 0$, temos $x - 1 < -1$, e

$$\int_0^1 t^{x-1} dt \geq \int_0^1 t^{-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \infty$$

por fim, a integral diverge para $x < 0$.

Portanto, a integral que define a função Gama converge para $x > 0$ e diverge para $x \leq 0$, ou seja, o domínio da função $\Gamma(x)$ definida pela integral em (2) é $\Gamma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

2.3 Propriedade fundamental

Tome $\Gamma(x + 1)$, tendo assim,

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$

logo, integrando por partes com $u = t^x$ e $dv = e^{-t} dt$, obtemos

$$\Gamma(x + 1) = \underbrace{-e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(x)} = x \Gamma(x)$$

Dessa forma, chegamos na recorrência:

$$\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x).$$

Essa relação de recorrência é muitas vezes chamada de propriedade fundamental da função Gama. Utilizaremos agora essa relação de recorrência da função Gama para verificar, de forma mais clara, que ela satisfaz a relação: $\Gamma(x) = (x - 1)!, x \in \mathbb{N}$.

De fato, sabemos que $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$. Aplicando essa relação sucessivamente, temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x \cdot \Gamma(x) \\
&= x \cdot (x-1) \cdot \Gamma(x-1) \\
&= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \Gamma(x-2) \\
&\vdots \\
&= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \\
&= x!, \text{ pois } \Gamma(1) = 1.
\end{aligned}$$

Também é possível provar essa identidade por indução.

1. Base da indução: Para $x = 1$, temos:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0! = (1-1)!$$

2. Hipótese da indução: Suponha que $\Gamma(k) = (k-1)!$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

3. Passo da indução: Mostremos que $\Gamma(k+1) = k!$:

$$\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k) = k \cdot (k-1)! = k!,$$

concluindo, pelo princípio da indução finita, que a fórmula vale para todo $x \in \mathbb{N}$. Isso é, provamos que $\Gamma(x) = (x-1)!, x \in \mathbb{N}$.

2.4 O fatorial de $-1/2$

Considerando a relação (3) e a relação de recorrência da função Gama, pode-se dizer que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Então calcularemos $\Gamma(1/2)$. Partimos da definição da função Gama para $x = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Fazemos a substituição: $t = u^2 \Rightarrow dt = 2u du$. Quando $t = 0$, temos $u = 0$, e quando $t \rightarrow +\infty, u \rightarrow +\infty$. Substituindo na integral, e como $\sqrt{u^2} = u$ para $u \geq 0$, temos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{u^2}} \cdot 2u du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \cdot 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

A integral resultante acima é bem conhecida, integral da função gaussiana, e sabendo que a função gaussiana é par, teremos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Assim, obtemos um importante resultado da função Gama. Portanto, calculamos que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2.5 Extensão do domínio

Para $x > 0$ mostramos que expressão (2) é convergente. Mas, esse domínio poderá ser estendido por meio de prolongamento analítico. Pela relação de recorrência $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ é possível estender a definição de $\Gamma(x)$ para $x \in (-1, 0)$. De fato, se $x \in (-1, 0)$, então $x + 1 \in (0, 1)$, e, portanto, $\Gamma(x + 1)$ está bem definida. Assim, faz sentido definir

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x}$$

Sendo $\Gamma(x + 1) > 0$ e $x < 0$, para $x \in (-1, 0)$, concluímos que, nesse intervalo, $\Gamma(x) < 0$ e que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \Gamma(x) = -\infty$$

Com isso, a definição da função Gama é estendida para um domínio maior do que o inicial:

$$\Gamma: (-1, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Como o domínio da função Gama está estendido para $\Gamma: (-1, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, é possível ampliar ainda mais. Dado $x \in (-2, -1)$, temos $x + 1 \in (-1, 0)$. Como $\Gamma(x + 1)$ já está definida nesse intervalo, podemos novamente, pela fórmula de recorrência, estender a definição para esses valores de x . Analisando os sinais do numerador e do denominador, para $x \in (-2, -1)$, temos que: $\Gamma(x) > 0$. Além disso, o comportamento da função nos extremos do intervalo implica que:

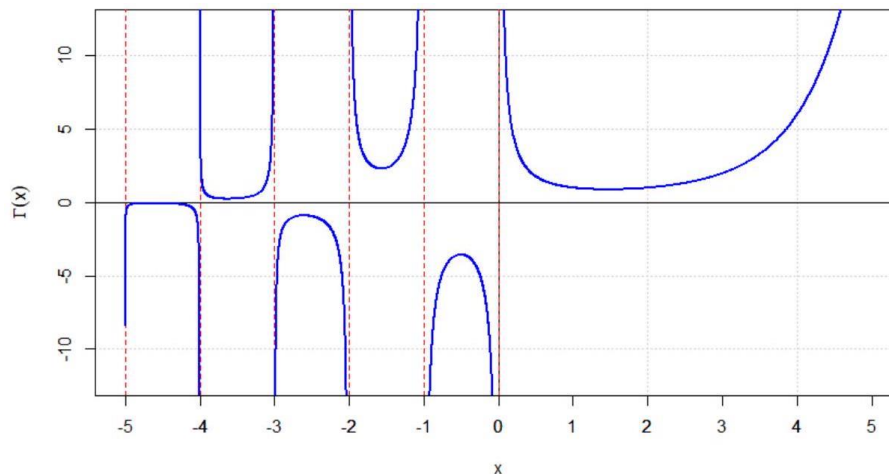
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \Gamma(x) = +\infty$$

Continuando esse processo de extensão recursiva, o domínio da função Gama pode ser ampliado para:

$$\mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

Esses valores onde a função Gama não está definida são chamados de polos (mais precisamente, polos simples), e em cada um deles a função diverge para infinito. Veja o gráfico para função Gama para $x \in (-5, 5)$ na Figura 1. A função Gama também admite uma extensão ao plano complexo, mas essa generalização não é o objetivo deste texto.

Figura 1: Gráfico da Função Gama



Fonte: Elaboração Própria.

2.6 Teorema de Bohr-Mollerup

Um célebre e elegante resultado, conhecido como Teorema de Bohr-Mollerup, garante que a função Gama de Euler é a única função em $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz simultaneamente as três propriedades seguintes:

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ para todo $x > 0$;
3. A função $\ln \Gamma(x)$ é convexa em $\mathbb{R}_+$.

Veja a demonstração desse teorema em Barata (2025).

2.7 Relação da Gama com a trigonometria

Uma relação importante da função Gama é estabelecida pela fórmula de reflexão de Euler, que relaciona a função Gama a funções trigonométricas, especificamente o seno:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \text{ para } x \notin \mathbb{Z}$$

Essa identidade mostra que a função Gama não só generaliza o fatorial para números reais e complexos, como também integra propriedades fundamentais com a trigonometria, permitindo estender muitas relações algébricas para o plano complexo.

2.8 Aplicações da função Gama

Como a função Gama é uma extensão contínua do fatorial para os números reais positivos (e também para números complexos), ela aparece naturalmente em diversas áreas da matemática pura e aplicada. Na probabilidade e estatística, a função Gama é usada na definição de várias distribuições importantes, como a distribuição Gama, qui-quadrado e a distribuição t de Student. Essas distribuições são fundamentais na inferência estatística, especialmente na construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses.

Na análise matemática, a função Gama surge na solução de integrais impróprias, equações diferenciais e no estudo das funções especiais, como a função Beta, que está diretamente relacionada à Gama (veja mais sobre a relação da função Gama com a função Beta, em Andrews, Askey e Roy (1999) e em Oliveira (2012)).

Em física e engenharia, a função Gama aparece em modelos envolvendo decaimento exponencial, estatísticas de partículas e teoria do calor, devido à sua presença em expressões envolvendo integrais generalizadas.

E ainda, na análise complexa e teoria dos números, a função Gama desempenha um papel central na extensão de funções aritméticas e no estudo de funções zeta e outras funções transcendentais.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, pudemos explorar uma pequena parte da genialidade por trás da proposta da função Gama. A partir de um objetivo aparentemente simples, generalizar o fatorial para números reais, surge uma construção rica, que conecta diferentes áreas da matemática como análise, estatística e teoria dos números.

Salienta-se aqui que, estudar funções especiais como a função Gama amplia significativamente o horizonte de quem se dedica à matemática. Além de enriquecer o repertório técnico, esse estudo oferece uma bagagem conceitual valiosa, proporcionando novas formas de interpretar e resolver problemas. Por fim, vale destacar que estudar as funções especiais, embora menos presentes no ensino básico, revela uma face profunda e sofisticada da matemática, recompensando aqueles que se dispõem a conhecê-las com beleza, estrutura e aplicações inesperadas.

REFERÊNCIAS

ANDREWS, George; ASKEY, Richard; ROY, Ranjan. The Gamma and Beta Functions. In: **Special Functions**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications), p. 1-60.

BARATA, João Carlos Alves. **Notas para um Curso de Física-Matemática. Capítulo 7: A Função Gama de Euler**. Disponível em: https://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html. Acesso em: 24 jul. 2025.

GRONAU, Detlef. Why is the gamma function so as it is? **Teaching Mathematics and Computer Science**, v. 1, n. 1, p. 43-53, 2003. Disponível em: https://imsc.uni-graz.at/gronau/TMCS_1_2003.pdf. Acesso em: 21 jul. 2025.

MELO, Kelma Gomes de. **A função gama como extensão da função fatorial e aplicações**. 2020. 74 f.: il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020. Disponível em: <https://repositorio.unilab.edu.br/jspui/handle/123456789/2055>. Acesso em: 21 jul. 2025.

OLIVEIRA, Edmundo Capelas de. **Funções especiais com aplicações**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

SEBAH, Pascal; GOURDON, Xavier. **Introduction to the Gamma Function**. 2002. Disponível em: <https://scipp.ucsc.edu/~haber/archives/physics116A10/gamma.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2025.