

Relatos de Pesquisa

EDO na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática: uma proposta de aula

ODE from the perspective of Exploratory Mathematics Teaching: a lesson proposal

Marcos Vinicius de Oliveira Peres¹ Laís Maria Costa Pires de Oliveira²

¹Graduado em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR - Campus de Paranavaí). Mestre em Bioestatística pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) e Doutor em Ciências pela Universidade Estadual de São Paulo (USP). Docente colaboradora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR - Campus de Paranavaí).

²Graduada em Matemática (Licenciatura) pela Faculdade Estadual de Educação, Ciências e Letras de Paranavaí (FAFIPA). Mestre e Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente colaboradora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR - Campus de Paranavaí).

✉ marcos.peres@ies.unespar.edu.br

✉ laismariaa@gmail.com

Palavras-chave:

Ensino de Matemática;
Proposta didática;
Ensino Superior.

Keywords:

Teaching mathematics;
Didactic proposal;
Higher education.

Resumo

Este estudo apresenta uma proposta de aula pautada na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) para o trabalho com Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) com alunos do Ensino Superior. A partir de uma tarefa que propõe a investigação do comportamento da temperatura da água com o passar do tempo são contextualizadas fases de uma aula no EEM, a saber: introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa pelos alunos, discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas, momento em que se deve apresentar a Lei de Aquecimento/Resfriamento de Newton. Espera-se que com esta proposta alunos que cursam a disciplina de EDO possam vivenciar o estudo e a utilização de conceitos matemáticos em situações não matemáticas, de seu cotidiano, possibilitando uma compreensão aprofundada do processo de experimentação e das soluções de EDOs no contexto de fenômenos físicos, como o aquecimento ou resfriamento de corpos.

Abstract

This study presents a lesson proposal based on the Exploratory Mathematics Teaching (EEM) perspective for working with Ordinary Differential Equations (ODEs) with higher education students. Based on a task that proposes the investigation of the behaviour of water temperature over time, the phases of a MES lesson are contextualized, namely: introduction of the task, development of the task by the students, collective discussion of the task and systematization of mathematical learning, at which point Newton's Law of Heating/Cooling should be presented. It is hoped that with this proposal, students studying ODEs will be able to experience the study and use of mathematical concepts in non-mathematical, everyday situations, enabling them to gain a deeper understanding of the process of experimentation and ODE solutions in the context of physical phenomena, such as the heating or cooling of bodies.

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) no Ensino Superior, abordadas em cursos de engenharia e matemática, é realizado comumente por meio de aulas expositivas e com um enfoque apenas na proposição e na resolução de exercícios para fixação do conteúdo. Contudo, estudos indicam que propostas de ensino alternativas às aulas expositivas aliadas ao uso de softwares (como MATLAB¹, Maple²) têm sido amplamente utilizadas como possibilidade de melhorar a compreensão dos alunos acerca de EDOs (Pinto; Lima, 2021).

Dessa maneira, os processos de ensino e de aprendizagem articulam teoria e prática de maneira com que os alunos percebam as equações como ferramentas possíveis e convenientes para solucionar problemas reais. Bueri (2019) explicita que o uso de tecnologias digitais e experimentos podem contribuir para a interação entre os estudantes e apoiar a aprendizagem por meio da análise de fenômenos físicos, como a variação de temperatura em sistemas, descrita por EDOs.

Assim, apresentamos uma proposta de aula, na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM), estruturada nas fases: introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa pelos alunos, discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas (Cyrino; Teixeira, 2016), para o trabalho com a Lei de Aquecimento/Resfriamento de corpos de Newton em uma disciplina de EDO no Ensino Superior.

2 A PROPOSTA DE AULA

Para a introdução da tarefa o professor solicita que os alunos se organizem em pequenos grupos, entrega a tarefa impressa (Quadro 1) e realiza a leitura do enunciado. Na sequência, apresenta os materiais de apoio que cada grupo deverá utilizar para a resolução da tarefa, quais sejam, um béquer, 1 litro de água, um termômetro, para medir a temperatura da água em diferentes momentos e um cronômetro para marcar os intervalos de tempo. O professor esclarece possíveis dúvidas, com cuidado para que essa intervenção não comprometa o desafio da tarefa e comunica o tempo que os alunos terão disponível para resolver a tarefa e a forma como os alunos deverão registrar suas resoluções para posterior compartilhamento com os demais colegas.

Quadro 1 - Tarefa proposta aos alunos

Preencha um béquer com um litro de água aquecida à temperatura superior à temperatura ambiente, e deixe-o em repouso sobre uma bancada para resfriar naturalmente. Em quanto tempo a temperatura da água se iguala à temperatura ambiente? Com o apoio de um termômetro, um cronômetro e do software GeoGebra, registre o comportamento do resfriamento deste corpo de maneira algébrica e gráfica.

Fonte: Os autores

¹ MATLAB é um ambiente de programação utilizado para cálculos numéricos. Disponível em: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

² Maple é um software matemático desenvolvido para cálculos simbólicos e numéricos. Disponível em: <https://www.maplesoft.com/products/Maple/>

No trabalho conjunto dos alunos durante o desenvolvimento da tarefa, eles podem se organizar para medir a temperatura da água em intervalos regulares de tempo (por exemplo, a cada 10 minutos) e anotar os valores obtidos nessas observações. A partir dessas anotações, podem procurar padrões calculando a variação entre os valores das temperaturas (ΔT) (Quadro 2) ou a razão entre a temperatura em um dado instante i e a temperatura no instante anterior i_1 (T_i/T_{i-1}) (Quadro 3).

Quadro 3 - Cálculo da diferença entre temperaturas

t (min)	T (C°)	ΔT
0	43,4°	
10	40,3 °	-3,1
20	37,6 °	-2,7
30	35,3 °	-2,3
40	33,5 °	-1,8
50	31,9 °	-1,6
60	30,5 °	-1,4
70	29,2 °	-1,3
80	28,1 °	-1,1
90	27,2 °	-0,9
100	26,6 °	-0,6
110	25,9 °	-0,7
120	25,4 °	-0,5

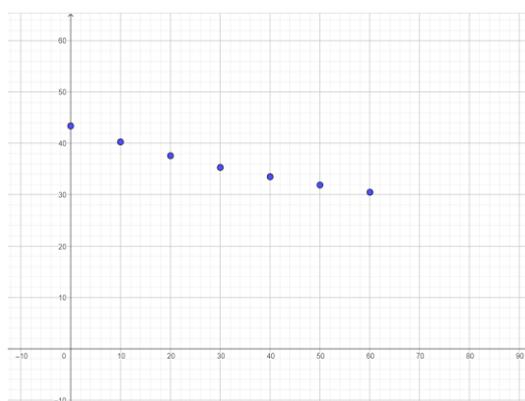
Quadro 2 - Cálculo da razão entre temperaturas

t (min)	T (C°)	(T_i/T_{i-1})
0	43,4°	
10	40,3 °	0,929
20	37,6 °	0,933
30	35,3 °	0,939
40	33,5 °	0,949
50	31,9 °	0,952
60	30,5 °	0,956
70	29,2 °	0,957
80	28,1 °	0,962
90	27,2 °	0,968
100	26,6 °	0,978
110	25,9 °	0,974
120	25,4 °	0,981

Nesse momento, o professor acompanha o trabalho dos pequenos grupos, fazendo intervenções para apoiar a resolução da tarefa e discutir eventuais dúvidas dos alunos. Ele pode formular questionamentos que instiguem os alunos a refletirem sobre o comportamento do fenômeno observado: com apenas duas medições, é possível descrever o resfriamento por meio de uma reta? Como isso seria feito? Com uma terceira medição, a reta construída ainda se aproxima dos dados? Existe um modelo matemático mais adequado para representar o fenômeno? Qual seria ele?

Na fase de discussão coletiva, os grupos compartilham suas resoluções e estabelecem conexões entre elas, discutindo a viabilidade das estratégias utilizadas. Espera-se que, com o apoio do software GeoGebra, os alunos possam apresentar e discutir com a turma registros das observações (Figura 1.).

Figura 1 - Plote da primeira hora dos dados observados.



Fonte: Os autores.

Nessa fase, com a atenção de toda a turma, é fundamental que o professor destaque a importância de coletar uma quantidade suficiente de dados. Isso é essencial para garantir a identificação de um modelo matemático que se ajuste adequadamente aos dados observados.

A partir da discussão coletiva, pode-se perceber que não há um padrão claro que descreva o processo de resfriamento da água. Diante disso, o professor pode sugerir que os alunos observem se há uma relação entre a variação da temperatura da água e a temperatura do ambiente. Essa análise pode levar os alunos a calcularem a diferença entre as temperaturas ou a razão entre elas, construindo, assim, quadros comparativos que incluam o valor da temperatura da água em diferentes intervalos de tempo, a temperatura ambiente e a variação de temperatura entre os intervalos (Quadro 4).

Quadro 4 - Relações entre a temperatura da água e a do ambiente

$T - T_m$	$T/(T - T_m)$	$\Delta T / (T - T_m)$	$\frac{\Delta T / \Delta}{T - T_m}$
21,2	2,047		
18,1	2,227	-0,171	-0,0171
15,4	2,442	-0,175	-0,0175
13,1	2,695	-0,176	-0,0176
11,3	2,965	-0,159	-0,0159
9,7	3,289	-0,165	-0,0165
8,3	3,675	-0,169	-0,0169
7	4,171	-0,186	-0,0186
5,9	4,763	-0,186	-0,0186
5	5,44	-0,180	-0,0180
4,4	6,045	-0,136	-0,0136
3,7	7	-0,189	-0,0189
3,2	7,938	-0,156	-0,0156

Fonte: Os autores

Para as comparações acima (Quadro 4), os alunos ajustam uma função que melhor descreve os dados referentes ao fenômeno observado, que, neste caso é um modelo exponencial. Novas representações gráficas devem ser apresentadas pelos alunos para outras discussões.

Em um novo momento da discussão coletiva os alunos compartilham seus registros (algébricos e gráficos) e partir desse ajuste o professor inicia a sistematização das aprendizagens matemáticas, apresentando formalmente a Lei de Resfriamento/Aquecimento de Newton, que estabelece que a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Como essa EDO é separável, teremos as seguintes etapas para a solução:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(T - T_m)} dT &= k dt \\ \int \frac{1}{(T - T_m)} dT &= \int k dt \\ \ln(T - T_m) + c_1 &= kt + c_2 \\ \ln(T - T_m) &= kt + c_3 \\ e^{\ln(T - T_m)} &= e^{kt + c_3} \\ T - T_m &= e^{kt} e^{c_3} \\ T(t) &= T_m + ce^{kt} \end{aligned}$$

Considerando que $T(0) = T_0$, temos:

$$\begin{aligned} T(0) &= T_m + ce^{k0} \\ T_0 &= T_m + c \Rightarrow c = T_0 - T_m \end{aligned}$$

Portanto, a solução para a Lei de Resfriamento/Aquecimento de Newton é

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$$

A constante k , pode ser obtida considerando um tempo observado e sua respectiva temperatura.

Por fim, espera-se que os alunos resolvam a EDO separável obtida e determinem os parâmetros do modelo, de maneira que possam comparar os resultados com os dados experimentais. Discutiremos a precisão da solução do modelo ajustado, utilizando diferentes pontos dos dados coletados. Esse processo permitirá aos alunos validar o modelo matemático e refletir sobre a aplicabilidade da Lei de Resfriamento de Newton em situações reais.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste estudo foi compartilhar uma proposta de trabalho com EDO, assente na perspectiva do EEM, para o Ensino Superior. O intuito é que esta possa ser uma possibilidade de aula em que os alunos não apenas apliquem conceitos de EDO previamente estudados, mas, que possam vivenciar o processo de experimentação matemática em um contexto real mobilizando conhecimentos referentes à disciplina ao lidar com fenômenos físicos, como o aquecimento e resfriamento de corpos.

REFERÊNCIAS

BUÉRI, J. W. S. **Análise de fenômenos físicos no ensino de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em cursos de engenharia**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. *In*: Márcia Cristina de Costa Trindade. (Org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EdUEL, 2016, p. 81-99.

PINTO, R. L.; DE LIMA, G. L.. Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de equações diferenciais ordinárias. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 8, n. 2, 20