

Artigos

As faces compostas e sua quantificação para poliedros eulerianos

Composite faces and their quantification for eulerian polyhedrons

Caras compuestas y su cuantificación para poliedros eulerianos

Gabriel Domingos¹

¹ Especialista em Matemática Financeira e Estatística pela União Brasileira de Faculdades - UNIBF.

✉ gb17491@gmail.com

Palavras-chave:

Poliedros.
Faces.
Arestas.
Vértices.
Faces Compostas.

Resumo

Poliedros são objetos tridimensionais constituídos por polígonos, tais polígonos são suas faces. O poliedro que é observado possui faces visíveis e faces ocultas, tal objeto pode ser representado no plano com a identificação de faces visíveis e faces ocultas, entretanto após a projeção as arestas visíveis ou ocultas se cruzam no plano, fornecendo perímetros de polígonos que não são suas faces. A existência dessa possibilidade define os objetivos deste trabalho, primeiro identificar tais polígonos em conteúdo já constatado na geometria; o segundo é em que circunstâncias é possível a quantificação das formas poligonais. Os resultados deste trabalho implicaram na denominação dos polígonos como Faces Compostas, construtivamente foi apontado como gerá-las a partir da projeção de um poliedro e com base na demonstração de Cauchy, apresentada por Elon Lages Lima, foi possível estabelecer a quantificação de Faces Compostas para poliedros Eulerianos.

Keywords:

Polyhedra.
Faces.
Edges.
Vertices.
Composite Faces.

Abstract

Polyhedra are three-dimensional objects consisting of polygons, such polygons are their faces. The polyhedron that is observed has visible faces and hidden faces, this object can be represented in the plane with the identification of edges of visible faces and hidden faces. After this projection, its visible or hidden edges intersect, providing perimeters of polygons that are not their faces. Soon the objectives of this work were to identify these polygons, analyzing the content already found in the geometry and under what circumstances it was possible to quantify them. The results of this work implied the denomination of polygons as Composite Faces, constructively pointed out how to generate them from the projection of a polyhedron and based on the cauchy demonstration, presented by Elon Lages Lima, it was possible to establish to the quantification of Composite Faces for Eulerian polyhedra.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Poliedros

O poliedro é uma estrutura tridimensional, pois possui altura, largura e comprimento. Considere que seus lados são constituídos por faces, que por sua vez são polígonos, como quadrados, retângulos, triângulos entre muitos outros. A quantidade de polígonos dispostos pelos lados do poliedro é finita.

Gomes, Pinheiro e Feitoza (2012 p. 34) definem o poliedro: "É um sólido geométrico cujo a superfície é composta por um número finito de faces, em que cada uma das faces é um polígono. Os seus elementos mais importantes são as faces, as arestas e os vértices." (GOMES; PINHEIRO; FEITOSA, 2012, p. 34).

É fato que existe uma ampla coleção de poliedros e podem ser separados em três grupos: Regulares, Semirregulares e Irregulares. Gomes, Pinheiro e Feitoza (2012), esclarece que um poliedro regular é formado somente por polígonos do mesmo tipo, como ocorre no caso do tetraedro. O poliedro semirregular é aquele formado por polígonos que não necessariamente devem coincidir no número de arestas. Por último o poliedro irregular possui polígonos variados, não há restrição para qual polígono não deve ser utilizado.

A separação dos poliedros em tais grupos é importante para enquadrar melhor uso de fórmulas, como é o caso da equação de Euler-Descartes, onde existe uma parte de poliedros que corresponde com o cálculo e outra não.

1.2 Poliedros projetados

Através da Geometria Descritiva tornou-se possível o desenho técnico, onde objetos tridimensionais são representados no plano, a nomenclatura utilizada para essa representação é perspectiva. É esclarecido por Miceli e Ferreira (2008) que a perspectiva é o meio de retratar graficamente os objetos da forma mais similar à realidade observada. Especificamente trata-se da perspectiva isométrica. Geralmente é representado na perspectiva as arestas visíveis com traços contínuos e as ocultas com traços pontilhados.

O poliedro sendo um objeto tridimensional pode ser incluído em perspectiva, essa inclusão é de uso constante na geometria e exemplos serão mostrados na sessão 2.2.

1.3 O conceito de "FACES COMPOSTAS"

Antes da projeção havia faces visíveis e faces ocultas para o observador. As faces visíveis possuem arestas e vértices igualmente visíveis, as faces ocultas, que eram aquelas que o observador não podia identificar diretamente antes da projeção, possuem uma parte de arestas e vértices oculta e outra parte visível, a parte oculta é comumente sinalizada por linhas tracejadas.

Os conceitos descritos no parágrafo anterior já são conhecidos, como pode-se verificar na leitura de Miceli e Ferreira (2008 p. 42):

Linha para contorno e arestas visíveis - é uma linha contínua, larga e uniforme, que serve para indicar as arestas visíveis do objeto. Linha para contornos e arestas não visíveis - é uma linha tracejada, larga e uniforme, que serve para indicar as arestas não visíveis do objeto." (MICELI; FERREIRA, 2008 p. 42).

O poliedro quando projetado permite o cruzamento das arestas visíveis e ocultas através do plano, essas novas ligações permitem estabelecer o perímetro de polígonos, que podem ser interpretados como "FACES COMPOSTAS", que seriam áreas parasitas resultantes do ato de forçar a visualização de um objeto tridimensional em duas dimensões. Exemplos indicados nas figuras 2 e 3 da sessão 2.1.

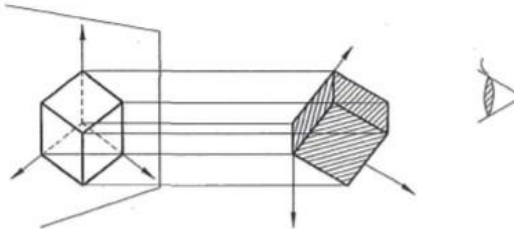
Assim por definição e característica principal temos que as Faces Compostas são polígonos definidos por arestas visíveis e arestas ocultas.

2 METODOLOGIA

2.1 Projeção e definição de Faces Compostas

Um objeto tridimensional qualquer pode ser observado e uma representação sua pode ser inscrita no plano.

Figura 1: Representação de um objeto tridimensional.

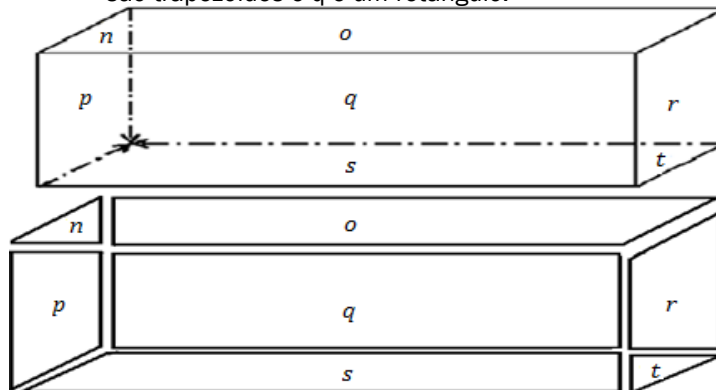


Fonte: Miceli e Ferreira (2008 p. 61)

As arestas e vértices que antes eram visíveis originam as Faces Visíveis, na imagem serão identificadas pelo traçado contínuo, por sua vez as arestas e vértices que não podiam ser observadas na perspectiva recebem o traçado pontilhado, como nota-se na Figura 1.

As Faces Compostas surgem da combinação de arestas visíveis e ocultas. A denominação deve-se ao fato de que toda face é constituída de arestas e as Faces Compostas são definidas por arestas, visíveis e ocultas (Figura 2).

Figura 2: Faces Compostas, onde n e t são triângulos, o , p , r e s são trapezoides e q é um retângulo.

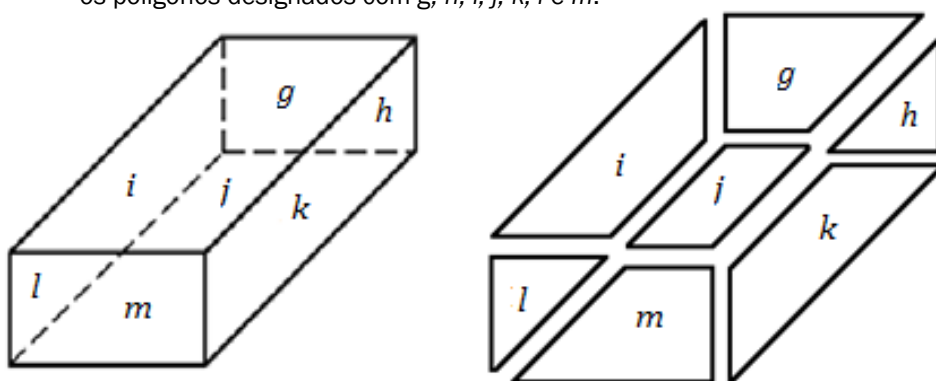


Fonte: O autor (2022).

Em um poliedro projetado as arestas ocultas dividem a face visível, as partes resultantes dessa divisão são as Faces Compostas.

Os formatos das Faces Compostas não dependem apenas do tipo de poliedro, mas também é dependente do referencial observacional adotado (Figura 3).

Figura 3: Projeção de figura, no lado esquerdo da imagem está o poliedro projetado em duas dimensões, enquanto o lado direito mostra as Faces Compostas que são os polígonos designados com *g, h, i, j, k, l* e *m*.



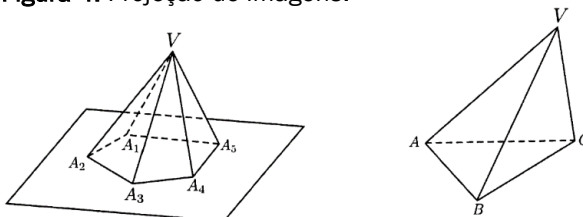
Fonte: O autor (2022).

2.2 Há indícios de Faces Compostas na Geometria?

No trabalho de Morcanas (2019), é citado os principais elementos de um poliedro, arestas, faces e vértices, onde, as faces são os polígonos que fecham o poliedro, as arestas são as retas que fecham as faces e os vértices são os pontos que conectam três ou mais arestas. Este trabalho bem construído poderia ter incluído os conceitos de faces ocultas e faces visíveis, uma vez que a explicação faz uso de poliedros projetados.

O artigo mencionado no parágrafo anterior não é o único caso que deixa a interpretação de faces ocultas e visíveis a cargo do leitor, temos os trabalhos que lidam com o tema de sólidos geométricos e o fazem utilizando poliedros projetados. É necessário um referencial de observação para projetar, o mesmo que delimita as partes oculta e visível, entretanto tais características frequentemente não são abordadas. As imagens a seguir (Figura 4), foram citadas na introdução e relatam o constante emprego de poliedros projetados em artigos e livros.

Figura 4: Projeção de imagens.



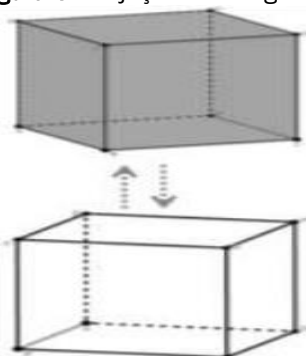
Fonte: Carvalho (2005).

Figura 5: Projeção de imagens.



Fonte: Dolce e Pompeo (2013).

Figura 6: Projeção de imagens.

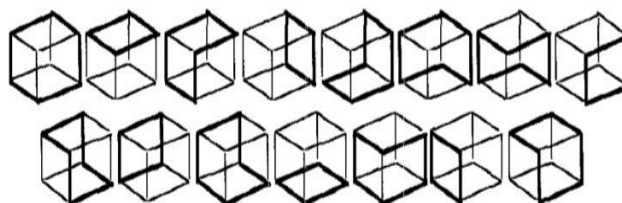


Fonte: Ferner, Soares e Mariani (2019).

A interpretação correta destas imagens requer que o leitor identifique faces ocultas e visíveis.

Houve pesquisas que fizeram a combinação de arestas dada uma projeção, pode-se destacar a de Shpitalni e Lipson (1996 p. 1005):

Figura 7: Trajetórias descritas pelas arestas em destaque.



Fonte: Shpitalni e Lipson (1996 p.1005).

Na Figura 7 é buscado sair de um vértice e retornar para ele, para isso utiliza-se como trajetória as arestas do poliedro que não se intersectam, note que para isso foi adotado um referencial de observação, portanto há arestas visíveis e ocultas e o uso de ambas foi adotado.

Ao longo da pesquisa para elaboração deste artigo não foram encontradas as definições e características exatas ou similares para as denominadas Faces Compostas.

2.3 Quantificando Faces Compostas

$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=F_v} (F_c)_i \quad (1)$$

Onde:

F_c = Faces Compostas existentes em uma face visível.

F_v = Total de faces visíveis.

T_{fc} = Total Faces Compostas.

Em (1) é admitida a hipótese da soma, onde é considerado a quantidade de Faces Compostas existente em cada face visível. Isso pode ser entendido na Figura 2 onde existem três faces visíveis, acima, abaixo e à direita, essas possuem as quantidades de Faces Compostas de 2, 3 e 2 respectivamente. Ao executar a soma tem-se $F_c=7$ para este poliedro e para essa maneira que foi projetado. Todo poliedro projetado possuirá faces visíveis, logo podem ser utilizadas como base para determinação e quantificação de F_c .

A soma descrita no parágrafo anterior requer a quantidade de F_c para cada face visível, portanto é necessário a equação que forneça essa quantidade exata. O trabalho do matemático Elon Lages Lima de 1985 apresentou de forma simplificada a demonstração de Cauchy. Augustin-Louis Cauchy definiu uma maneira de provar a equação de Euler-Descarte. Lima (1985) apresenta a relação:

$$V - A + F = 2 \quad (2)$$

A equação (2) pode ser também referida como Identidade de Euler, Relação de Euler, Equação Restrita de Euler ou ainda como Teorema de Euler-Descarte.

Será feita uma demonstração com base em Lima (1985), onde é apresentado a demonstração de Cauchy, onde considerou que se (2) for válida, basta provar que a equação (3).

$$V - A + (F - 1) = 2 - 1 \quad (3)$$

Uma vez que:

$$\begin{aligned} V + F &= 2 + A \\ V + F - A &= 2 \\ V + (F - 1) - A &= 2 - 1 \end{aligned}$$

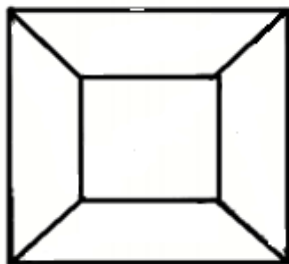
Para obter (3) é retirada uma face de (2), o efeito dessa diminuição não altera os valores de arestas e vértices do poliedro. Para este poliedro que corresponde a (2) tem-se uma nova contagem de faces, a F' :

$$V - A + F' = 1 \quad (4)$$

Tal que: $F' = F - 1$

Será projetado tal poliedro sem uma face no plano, as arestas buscarão um foco dentro da área da face extraída. De forma análoga pode-se interpretar como uma caixa sem a tampa vista de cima.

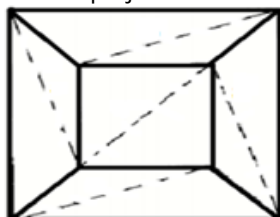
Figura 8: Poliedro projetado com arestas e vértices com foco no centro da face extraída.



Fonte: Lima (1985).

Faça a triangulação com o traçar de diagonais, estas diagonais aumentarão o número de arestas, de faces, mas manterão o número de vértices.

Figura 9: Poliedro projetado com triangulação.

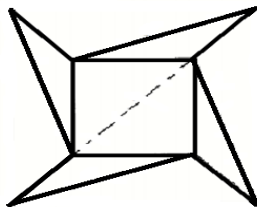


Fonte: Lima (1985).

Após a triangulação, com novos valores definidos é ainda verificada a equação (4).

Remova as faces que possuem arestas livres.

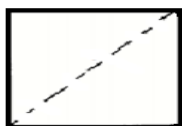
Figura 10: Poliedro após a triangulação e com uma remoção.



Fonte: Lima (1985).

Verifique que novamente é válida a equação (4). Removendo novamente as faces com arestas livres, findamos na imagem seguinte.

Figura 11: Poliedro após a triangulação e com duas remoções.



Fonte: Lima (1985).

Nessa etapa fica claro a validade da equação (4).

Essa demonstração apresenta a quantificação de faces que estão contidas em outra, para isso foi empregado a fórmula (4), logo por hipótese será adotada essa fórmula com algumas adaptações, para que se possa determinar a quantidade de Faces Compostas contidas em uma face visível.

$$F' + V - A = 1 \rightarrow F_c + V_o - A_o = 1$$

$$F_c + V_o - A_o = 1 \quad (5)$$

Onde:

F_c = Quantidade de Faces Compostas existentes em uma face visível.

V_o = Quantidade de vértices ocultos contidos uma face visível.

A_o = Quantidade de arestas ocultas contidas em uma face visível.

2.3 Teste com poliedro projetado.

Será desenvolvido teste com o poliedro da **Figura 2**. Há 3 faces visíveis, abaixo, acima e a direita.

Para a face abaixo há 3 arestas ocultas e 1 vértice oculto, substituindo em (5), deverá haver 3 para F_c .

$$F_c + V_o - A_o = 1$$

$$F_c + 1 - 3 = 1$$

$$F_c - 2 = 1$$

$$F_c = 3$$

Para a face superior há 1 aresta oculta e 0 vértices ocultos, substituindo em (5), deverá haver 2 para F_c .

$$\begin{aligned}
 F_c + V_o - A_o &= 1 \\
 F_c + 0 - 1 &= 1 \\
 F_c &= 1 + 1 \\
 F_c &= 2
 \end{aligned}$$

Para a face a direita há 1 aresta oculta e 0 vértices ocultos, substituindo em (5), deverá haver 2 para F_c .

$$\begin{aligned}
 F_c + V_o - A_o &= 1 \\
 F_c + 0 - 1 &= 1 \\
 F_c &= 1 + 1 \\
 F_c &= 2
 \end{aligned}$$

Ao obter o valor de Faces Compostas para cada face visível calcula-se (1):

$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=F_v} (3)_1 + (2)_2 + (2)_3 \rightarrow T_{fc} = 7$$

A equação (5) torna-se válida para o poliedro projetado na **Figura 2** e por consequência, (1) também se válida.

Pode-se conceber nova equação da união de (1) e (5).

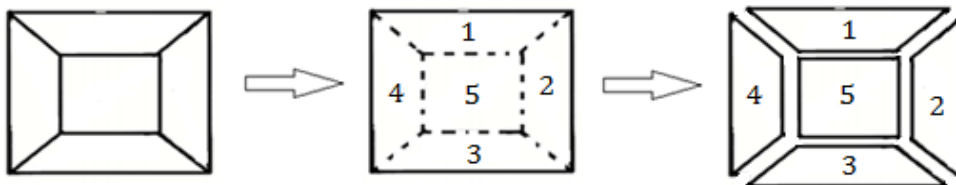
$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=F_v} (1 - V_o + A_o)_i \quad (6)$$

2.4 Demonstração para poliedros Eulerianos.

Como a equação (5) foi adaptada de (4), o cálculo (6) deve obter a quantidade de Faces Compostas para cada poliedro e para cada referencial adotado. A demonstração de Cauchy, dada por Lima (1985) poderá ser usada como prova, especificamente as figuras, 3, 4, 5 e 6. Com as definições de F_c da sessão 2.1, a demonstração será em seis partes.

Primeira parte: Considere que as arestas externas pertencem a face visível e as internas são arestas ocultas. Logo haverá 1 face visível, 8 arestas ocultas e 4 vértices ocultos. Veja a representação abaixo.

Figura 12: Definindo arestas internas com ocultas e externas como visíveis. Os algoritmos identificam as Faces Compostas.



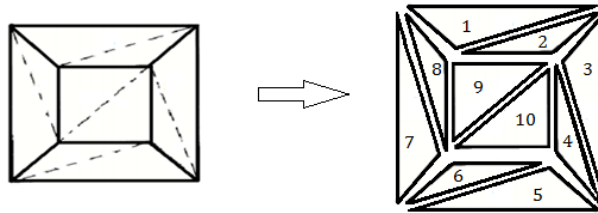
Fonte: Adaptado de Lima (1985).

A equação (6) adaptada com os dados dessa primeira parte, devem conferir com a quantidade de 5 para Faces Compostas.

$$\begin{aligned}
 T_{fc} &= \sum_{i=1}^{n=1} (1 - 4 + 8)_1 \\
 T_{fc} &= 5
 \end{aligned}$$

Segunda parte: Considere que as arestas tracejadas são arestas ocultas. Logo haverá 5 faces visíveis, 5 arestas ocultas e 0 vértices ocultos. Veja a representação abaixo.

Figura 13: Arestas ocultas com linhas tracejadas. Os algoritmos identificam as Faces Compostas.



Fonte: Adaptado de Lima (1985).

Deve ser verificada a quantidade de 10 Faces Compostas para a equação (6) nessa parte.

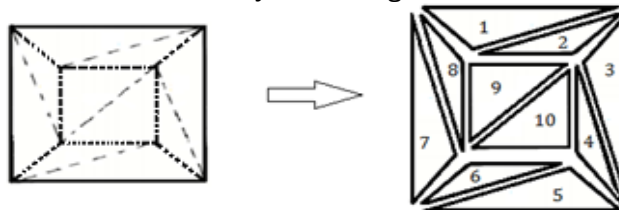
$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=5} (1 - 0 + 1)_i + (1 - 0 + 1)_2 + (1 - 0 + 1)_3 + (1 - 0 + 1)_4 + (1 - 0 + 1)_5$$

$$T_{fc} = 10$$

Nesse caso, as quantidades de V_o e A_o são iguais para todas as F_v , mas não necessariamente será o caso para demais poliedros.

Terceira parte: Nesta segunda adaptação da **Figura 9** será considerado que as arestas externas são visíveis e todas as internas são ocultas. Logo haverá 1 face visível, 13 arestas ocultas e 4 vértices ocultos. Veja a representação abaixo:

Figura 14: Arestas ocultas com linhas tracejadas. Os algoritmos identificam as Faces Compostas.



Fonte: Adaptado de Lima (1985).

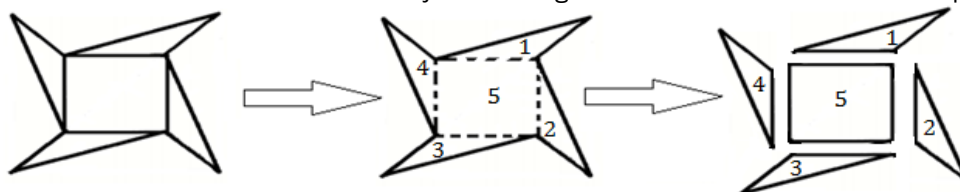
$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=1} (1 - 4 + 13)_i$$

$$T_{fc} = 10$$

Na execução de (6) é confirmada a quantidade de 10 de Faces Compostas.

Quarta parte: Adaptando a **Figura 10** será considerado as arestas externas como visíveis e todas as internas como ocultas. Logo haverá 1 face visível, 4 arestas ocultas e 0 vértices ocultos. Veja a representação abaixo:

Figura 15: Arestas ocultas com linhas tracejadas. Os algoritmos identificam as Faces Compostas.



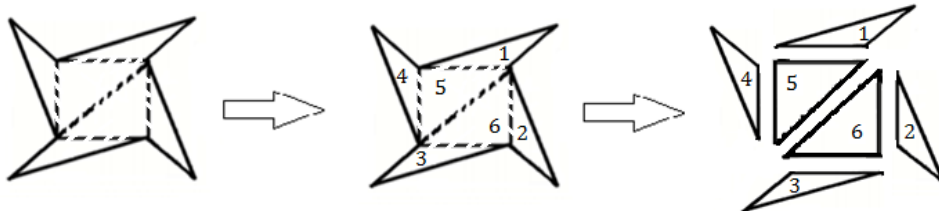
Fonte: Adaptado de Lima (1985).

$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=1} (1 - 0 + 4)_1$$

$$T_{fc} = 5$$

Quinta parte: Adaptando a **Figura 10** será considerado as arestas externas como visíveis e todas as internas como ocultas. Logo haverá 1 face visível, 5 arestas ocultas e 0 vértices ocultos. Veja a representação abaixo:

Figura 16: Arestas ocultas em linhas tracejadas e Faces Compostas numeradas.



Fonte: Adaptado de Lima (1985).

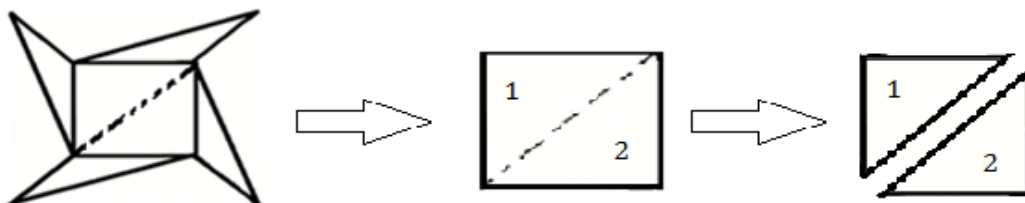
Deverá ser verificado a quantidade de 6 Faces Compostas.

$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=1} (1 - 0 + 5)_1$$

$$T_{fc} = 6$$

Sexta parte: Adaptando a **Figura 10**, considere a aresta tracejada como oculta. Logo haverá 5 faces visíveis, 1 aresta oculta e 0 vértices ocultos. Veja a representação abaixo:

Figura 17: Aresta oculta definida por linha tracejada. Os algoritmos identificam as Faces Compostas.



Fonte: Adaptado de Lima (1985).

$$T_{fc} = \sum_{i=1}^{n=1} (1 - 0 + 1)_1$$

$$T_{fc} = 2$$

Pela definição na sessão 2.1, a Face Composta é determinada pela combinação de arestas visíveis e ocultas, portanto, **Figura 10** e **Figura 11** expressam a mesma quantidade de Faces Compostas, já que em ambos os casos, apenas uma face visível foi dividida por aresta oculta. As faces visíveis que não possuem arestas ocultas na **Figura 17** foram desconsideradas.

Ao longo da demonstração foi buscado evidenciar a correspondência com a equação (6), fazendo uso das possibilidades que poderiam ser produzidas da apresentação original de Lima (1985). Em todos os

casos, quantidades esperadas foram atingidas, o que evidencia que é possível contar F_c de um dado objeto projetado, desde que tomada a contagem por Faces Visíveis individualmente.

2.4 Casos de determinação e indeterminação.

O cálculo do Total de Faces Compostas foi possível, contudo, a equação (6) foi embasada na equação (4), que foi desenvolvida para provar (3), ou seja, o poliedro que não se adequar a relação de Euler, poderá ser igualmente inadequado para (6). Por Nascimento (2012 p.45):

Dado um poliedro qualquer com F faces, A arestas e V vértices satisfazem a relação $F - A + V = 2$. Observamos que, para alguns poliedros esta relação se mostra verdadeira, mas, para outros poliedros não. Os poliedros nos quais esta relação se verifica verdadeira são chamados de poliedros Eulerianos." (NASCIMENTO, 2012 p. 45)

Poderá ser considerado para (6), as mesmas restrições consideradas para a relação de Euler-Descarte. Há poliedros regulares, semirregulares e irregulares, sendo a maior adequação de (2) para os dois primeiros grupos, sendo assim poliedros não adequados a (2) poderão ser igualmente inadequados para (6).

Sobre a indeterminação, essa se faz presente essencialmente em corpos de traços curvos, não é possível definir exatamente a quantidade de traços de uma curva, portanto não haverá quantidade única de arestas ocultas e por consequência não haverá quantidade única para F_c . No caso de corpos redondos, o Total de Faces Compostas está também diretamente relacionado a quantidade de arestas empregadas no traço curvo.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Destaca-se os principais resultados:

1° As Faces Compostas podem ser definidas como todo polígono ou área, cujo perímetro é constituído por arestas ocultas e arestas visíveis. Faces Compostas dividirão as faces visíveis do poliedro projetado.

2° A quantidade de Faces Compostas pode ser contabilizada para as projeções de poliedros do conjunto Euleriano.

3° O conceito e definição de Faces Compostas não está limitado ao conjunto de poliedros Eulerianos, para este conjunto foi possível a quantificação, o que não impossibilita a existência e quantificação de Faces Compostas para demais objetos tridimensionais projetados no plano.

4° Há casos em que quantidade de Faces Compostas não é exata para dada projeção, que são casos de corpos com traços curvos, onde existe a alteração da totalidade de Faces Compostas e isso é devido a dependência da quantidade segmentos de reta empregados para desenvolvimento da curvatura.

Com base no desenvolvimento deste trabalho compreende-se que o conceito e definição de Faces Compostas é um novo campo de estudo para a Matemática e em especial para a Geometria. Este é provavelmente o primeiro estudo sobre Faces Compostas, o conteúdo apresentado fornece fortes evidências da existência de tais faces e trabalhos que sucederão trarão novas situações que poderão reafirmar ou melhorar os conceitos apresentados inicialmente aqui.

4 CONCLUSÃO

O tema abordado neste trabalho não teve similares até então, sendo original carecia de nova nomenclatura, o título dado foi Faces Compostas e tais elementos possuem características próprias para sua identificação e quantificação.

As demonstrações foram baseadas afim de conceber caminho para quantificação, o cálculo uma vez provado evidenciou a existência das Faces Compostas, entretanto também as impôs nas condições de adequação da relação Euler-Descarte, portanto validando-se primariamente para o conjunto de poliedros ,Eulerianos.

As implicações dos resultados indicam que as Faces Compostas podem surgir da projeção de qualquer objeto tridimensional no plano.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005, 12 p.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau; **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Espacial Posição e Métrica**. São Paulo: Atual Editora. 2013, 123 p.

FERNER, Dienifer da Luz; SOARES, Maria Arlita Silveira Soares; MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Geometria Espacial de Posição: Análise de duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 74, p. 56 - 71, 2019. DOI: <https://doi.org/10.22456/1679-1916.106007>

GOMES, Laudiane Rufino; PINHEIRO, Mônica Cristina Reis; FEITOZA, Rosângela Leal. **Estudo dos Poliedros**. Repositório da Universidade Federal do Amapá, Amapá, 2012. DOI: <https://doi.org/10.20872/24478407/regmpe.v3n3p56-80>

LIMA, E. L. O teorema de Euler sobre poliedros. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 2, p. 57-74, 1985.

MORCANAS, Marcelle Santos. **O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros. 2019**. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019. DOI: <https://doi.org/10.17143/rbaad.v20i1.595>

MICELI, Maria Tereza; FERREIRA, Patricia. **Desenho Técnico Básico**. Paraná: Ao Livro Técnico. 2008. p. 42-43, p. 61 - 62.

NASCIMENTO, Andrea Costa; **Duas maneiras diferentes de demonstrar a Relação de Euler para poliedros convexos, vista no ensino médio**. Repositório da Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2012. DOI: <https://doi.org/10.17143/ciaed/xxiiciaed.2016.00303>

SHPIITALNI, M.; LIPSON, H. Identification of Faces in a 2D Line Draw Projection of a Wireframe Object. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 18, n. 10, p. 1000-1012, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1109/34.541409>